Metody numeryczne

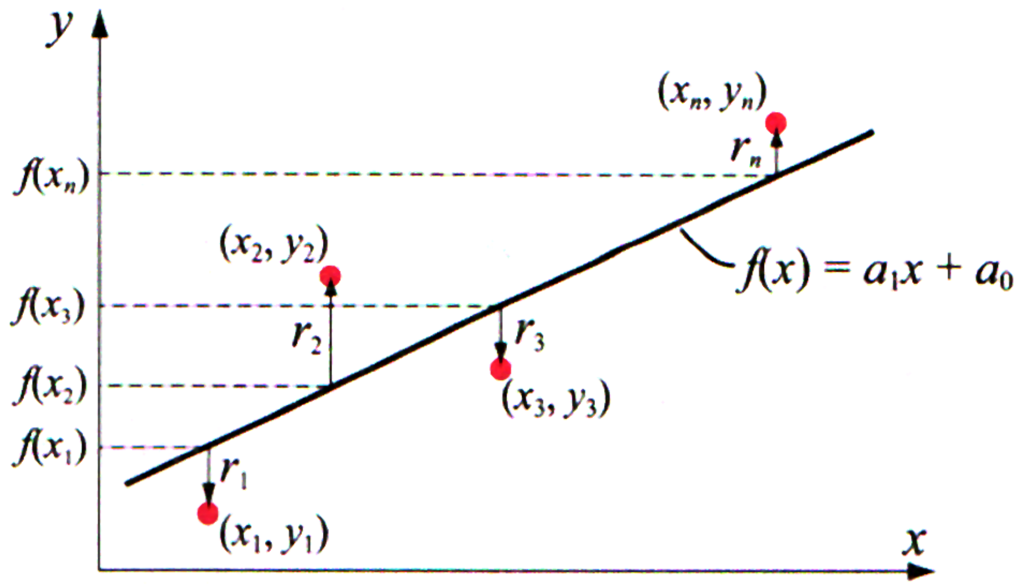
Wykład nr 5:

Aproksymacja i interpolacja

dr Piotr Fronczak

Aproksymacja i interpolacja

Aproksymacja równaniem liniowym



Błąd dopasowania

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0) \right]^2$$

- Funkcja dwóch zmiennych a_1 i a_0

Funkcja E ma minimum dla takich wartości a_1 i a_0, dla których pochodne cząstkowe względem a_1 i a_0 zerują się:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_1 x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_1 x_i - a_0)x_i = 0$$

Jest to układ dwóch równań liniowych:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Rozwiązaniem tego układu jest:

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

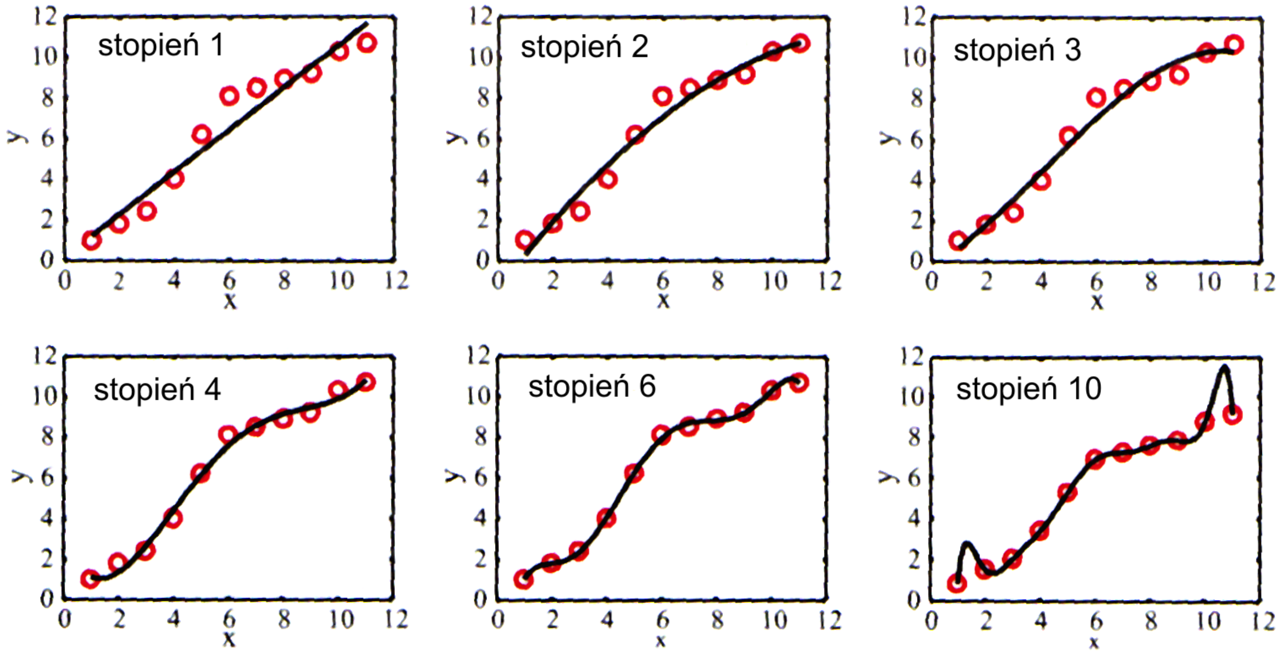
Aproksymacja wielomianami wyższego rzędu

Wielomian – funkcja postaci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

a_i - współczynniki rzeczywiste
n – stopień wielomianu

Zbiór n punktów można aproksymować wielomianami różnych stopni (maksymalnie wielomianem stopnia n-1)



Dla n punktów wielomian stopnia (n-1) przechodzi przez wszystkie punkty. Gdy n jest duże, aproksymowanie funkcji wielomianem stopnia (n-1) nie jest wskazane.

Zastosujmy wielomian stopnia m do aproksymacji n punktów:

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Wtedy błąd:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \ldots + a_1 x_i + a_0) \right]^2$$

Liniowe równanie $m+1$ zmiennych (a_0 do a_m)

Funkcja E ma minimum dla takich wartości a_i , dla których pochodne cząstkowe względem a_i zerują się.

Weźmy $m = 2$ (wielomian kwadratowy):

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0) \right]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0) x_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0) x_i^2 = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

Możemy zatem uogólnić problem:

Dla wielomianu stopnia m mamy $m+1$ równań postaci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right) a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+m}\right) a_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, m$.

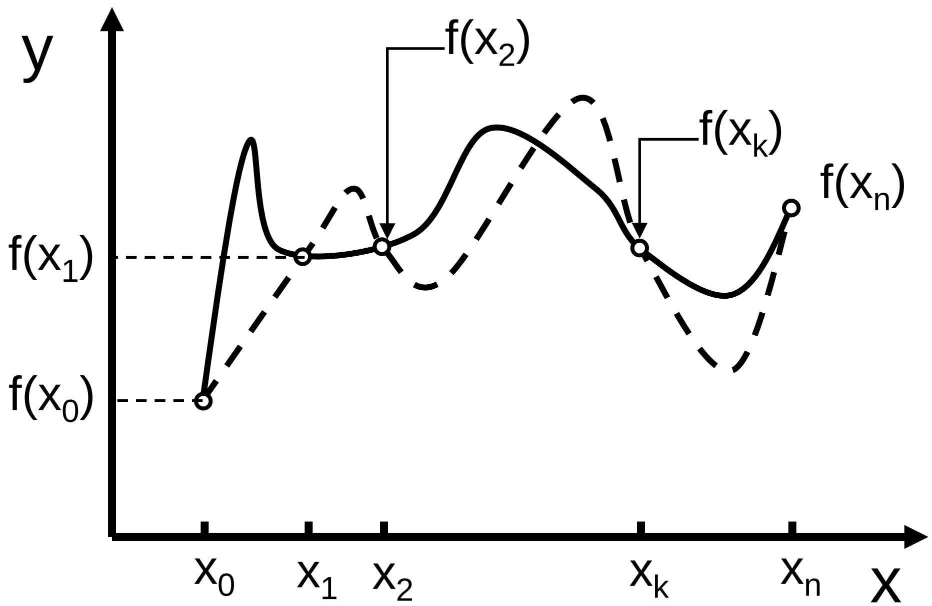
```
for j = 0..2m
        xsum[j] = Σ_{i=1}^{n} x_i^j

for j = 0..m
        for i = 0..m
                A[i][j] = xsum[i+j]

        b[j] = Σ_{i=1}^{n} x_i^j y_i

Znajdź wektor a taki, że A·a = b
```

Interpolacja



Interpolacją funkcji $f(x)$ na przedziale $<a; b>$ nazywa się wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji $f(x)$ dla dowolnego argumentu $x \subset <a; b>$ przy znanych jej wartościach $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ w ustalonych punktach $a \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq b$ zwanych węzłami interpolacji

Twierdzenie

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ stopnia n $(n \geq 0)$, który w punktach $x_0, x_1, ..., x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, ..., y_n$

Dowód: Szukany wielomian ma postać:

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Korzystając z faktu, że znamy wartości tego wielomianu w $n+1$ punktach, możemy napisać układ $n+1$ równań liniowych z $n+1$ niewiadomymi współczynnikami

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1)$$

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = f(x_i)$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n)$$

Układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_i) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Macierz Vandermonde’a

Niewiadome współczynniki

Dane wartości

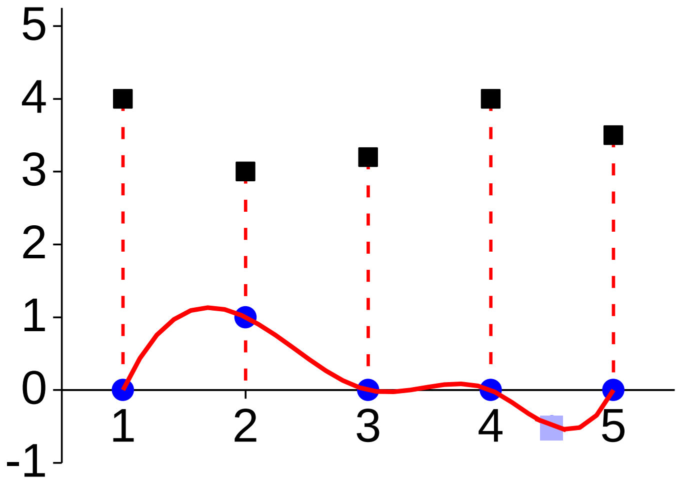
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Wyznacznik Vandermonde’a jest różny od zera, jeśli $x_i \neq x_j,\ i \neq j\ (i, j = 0,1,...,n)$, czyli układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Skonstruujemy wielomiany pomocnicze $W_n^i(x)$, $i = 0,1,\ldots,n$, stopnia n takie, że

$$W_n^i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & gdy \quad i \neq j \\ 1 & gdy \quad i = j \end{cases}$$



Oznacza to, że dla $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n$, wielomian $W_n^j(x)$ równa się zeru, a dla x_j równa się jedności. Stąd jest postaci:

$$W_n^i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$

Dla $x = x_i$ $W_n^i(x_i) = 1$, zatem

$$1 = c_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)$$

czyli

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Czyli:

$$W_n^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Wystarczy przyjąć:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} W_n^i(x) y_i$$

Ostatecznie:

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \cdot y_i$$

otrzymujemy wielomian stopnia co najwyżej n spełniający wszystkie warunki wymagane przy interpolacji.

Uwagi:

1. Wzór uproszczony

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

2. Jeśli zbiór danych $\{x,y\}$ jest poszerzony o nową daną, cały wielomian Lagrange'a musi być przeliczony od początku (porównaj z następną metodą).

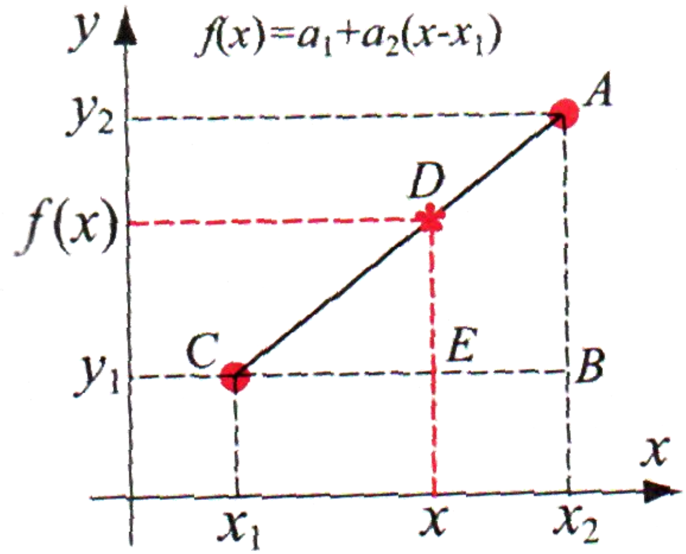
Wielomiany Newtona

Ogólna postać:

$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_n(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Wielomian Newtona pierwszego stopnia

Dla dwóch punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2)



$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1)$$

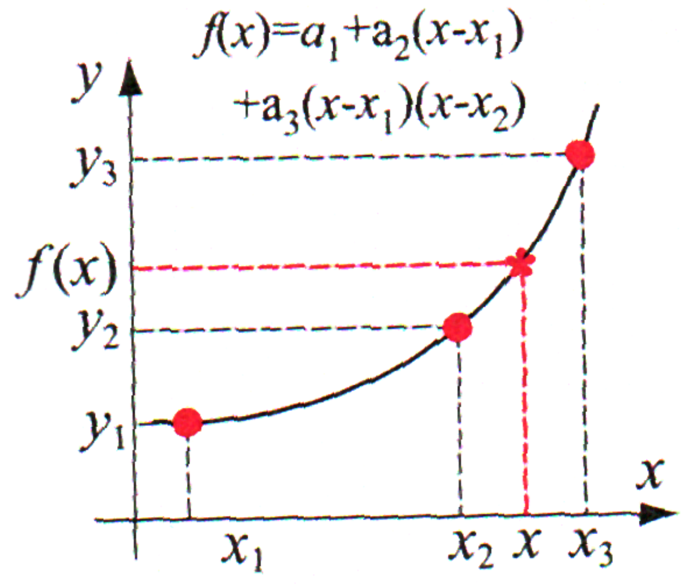
$$\frac{DE}{CE} = \frac{AB}{CB} \qquad \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\boxed{a_1 = y_1} \qquad \boxed{a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Wielomian Newtona drugiego stopnia

Dla trzech punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3)



$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$$

Podstawiając $x = x_1$ i $f(x) = f(x_1) = y_1$

Dostajemy $\boxed{a_1 = y_1}$

Podstawiając $x = x_2$ i $f(x) = f(x_2) = y_2$

Dostajemy $y_2 = y_1 + a_2(x_2 - x_1)$

$$\boxed{a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Podstawiając $x = x_3$ i $f(x) = f(x_3) = y_3$

Dostajemy $y_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + a_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

$$\boxed{a_3 = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)}}$$

Współczynniki a_1 i a_2 są takie same jak dla wielomianu pierwszego stopnia. Czyli, jeśli mamy dwa punkty i wyznaczony wielomian pierwszego stopnia, to po dodaniu trzeciego punktu wystarczy obliczyć tylko jeden współczynnik i dodać nowy wyraz do istniejącego wielomianu.

Wielomian Newtona trzeciego stopnia

$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Znamy a_1, a_2, a_3 oraz $f(x = x_4) = y_4$. Możemy więc znaleźć a_4:

$$\boxed{a_4 = \frac{\dfrac{\dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{(x_4 - x_2)} - \dfrac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)}}{(x_4 - x_1)}}$$

Uogólniona postać współczynników wielomianu Newtona

$$\boxed{a_1 = y_1}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = f[x_2, x_1]$$

Iloraz różnicowy pierwszego rzędu

Iloraz różnicowy drugiego rzędu

$$\boxed{a_3 = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)}} = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = f[x_{3,} x_2, x_1]$$

$$\boxed{a_4 = \frac{\frac{\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}}{(x_4 - x_2)} - \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{(x_3 - x_1)}}{(x_4 - x_1)}} = \frac{f[x_4, x_3, x_2] - f[x_{3,} x_2, x_1]}{x_4 - x_1} = f[x_{4,} x_{3,} x_2, x_1]$$

Algorytm:

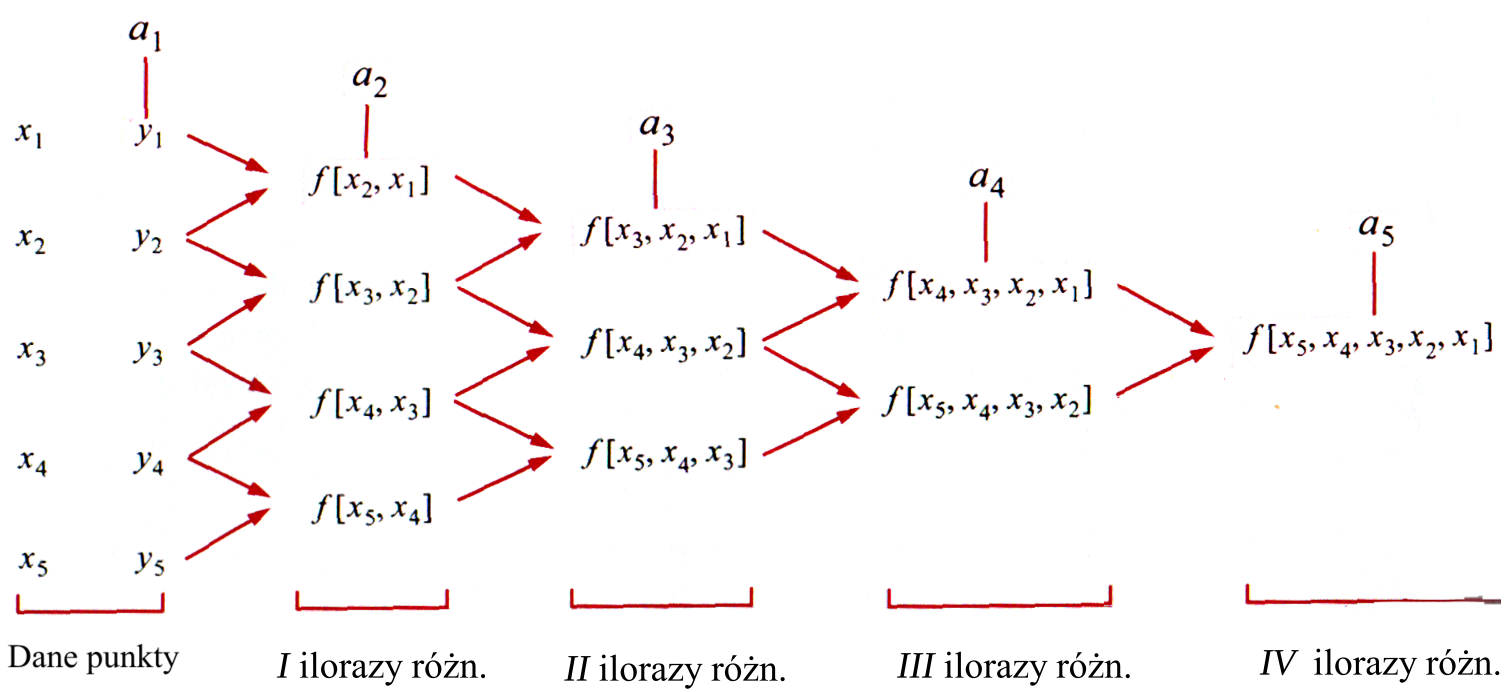
Danych jest n punktów.

1. Obliczamy n-1 ilorazów różnicowych pierwszego rzędu

2. Korzystając z wartości obliczonych w kroku 1, obliczamy n-2 ilorazów różnicowych drugiego rzędu

3. Korzystając z wartości obliczonych w kroku 2, obliczamy n-3 ilorazów różnicowych trzeciego rzędu

n. Korzystając z wartości obliczonych w kroku n-1, obliczamy 1 iloraz różnicowy n-tego rzędu



Przykład:

Znajdźmy wielomian Newtona czwartego stopnia przechodzący przez punkty:

x	1	2	4	5	7
y	52	5	-5	-40	10

$$f(x) = a_1 + a_2(x-1) + a_3(x-1)(x-2) + a_4(x-1)(x-2)(x-4) + a_5(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

$a_1 = 52$ $\quad a_2 = -47$ $\quad a_3 = 14$ $\quad a_4 = -6$ $\quad a_5 = 2$

x_i	y_i
1	52
2	5
4	-5
5	-40
7	10

$$\frac{5-52}{2-1} = -47 \qquad \frac{-5-5}{4-2} = -5 \qquad \frac{-40-(-5)}{5-4} = -35 \qquad \frac{10-(-40)}{7-5} = 25$$

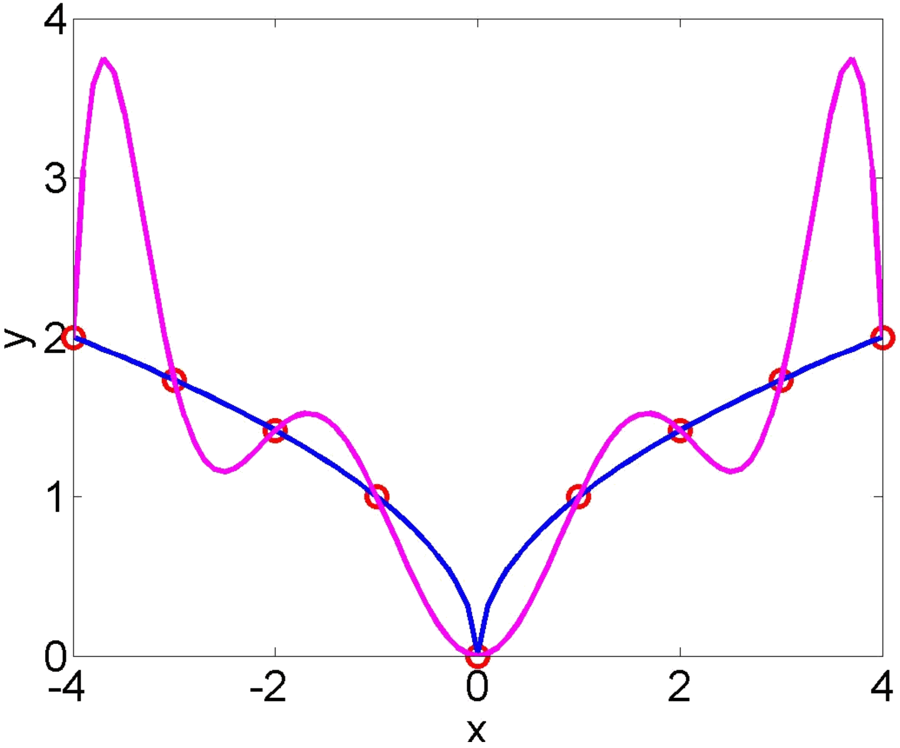
$$\frac{-5-(-47)}{4-1} = 14 \qquad \frac{-35-(-5)}{5-2} = -10 \qquad \frac{25-(-35)}{7-4} = 20$$

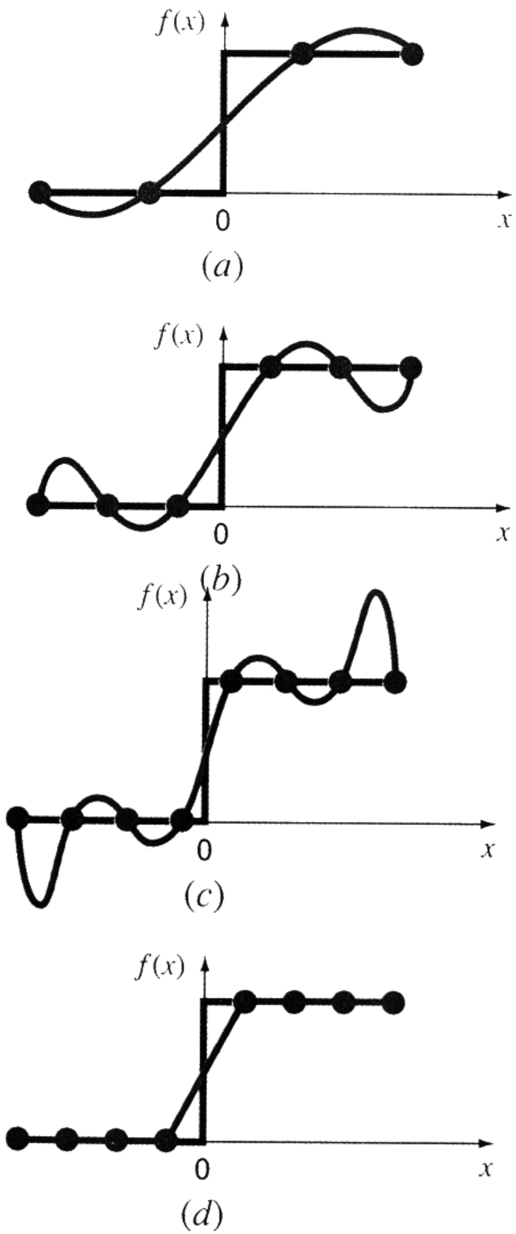
$$\frac{-10-14}{5-1} = -6 \qquad \frac{20-(-10)}{7-2} = 6$$

$$\frac{6-(-6)}{7-1} = 2$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi

Zadanie: znajdź wielomian interpolujący funkcję *f(x) = sqrt(abs(x))*, mając dane wartości tej funkcji w punktach -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.





Wielomian
3 stopnia

Wielomian
5 stopnia

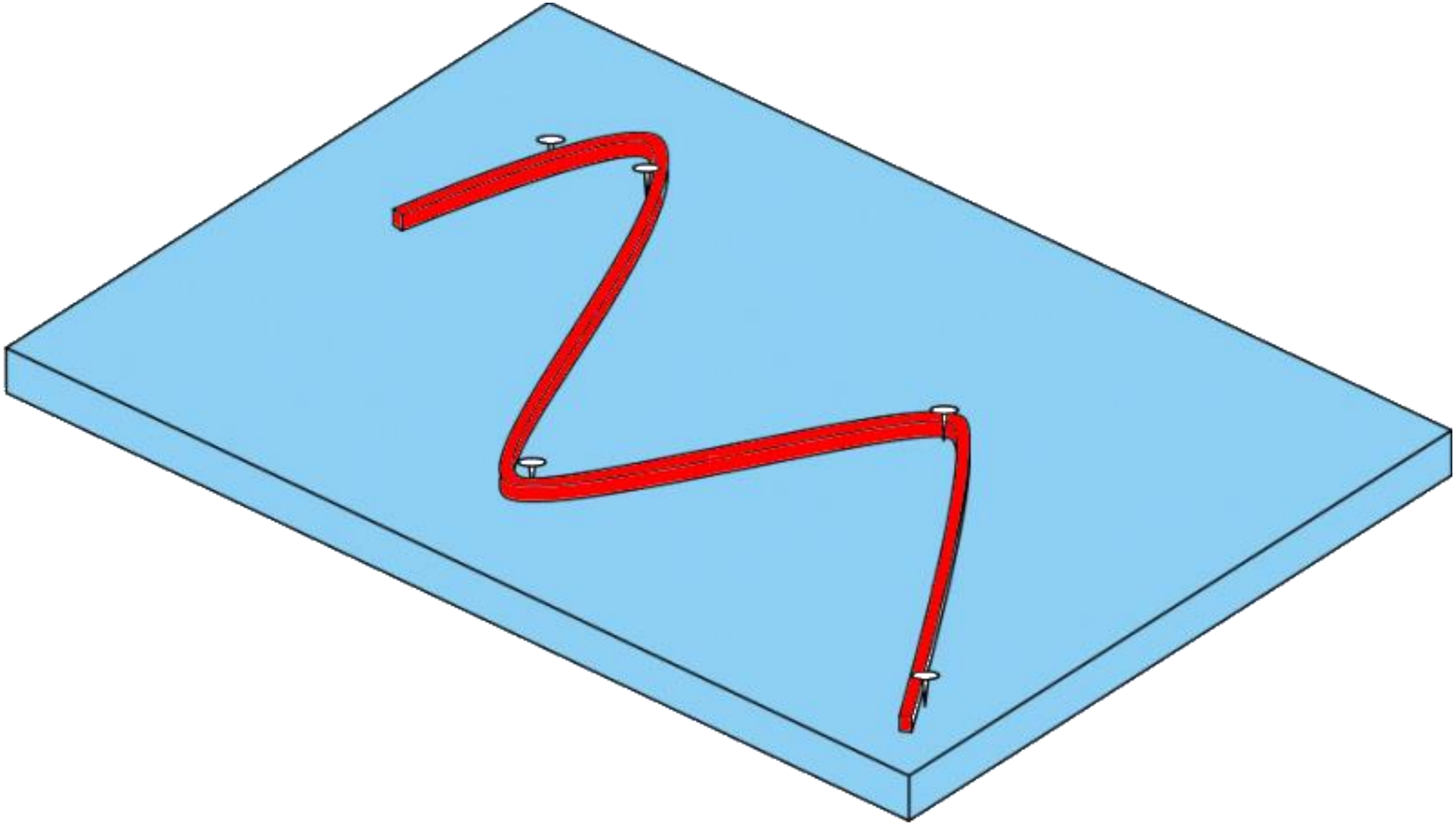
Wielomian
7 stopnia

Funkcje sklejane

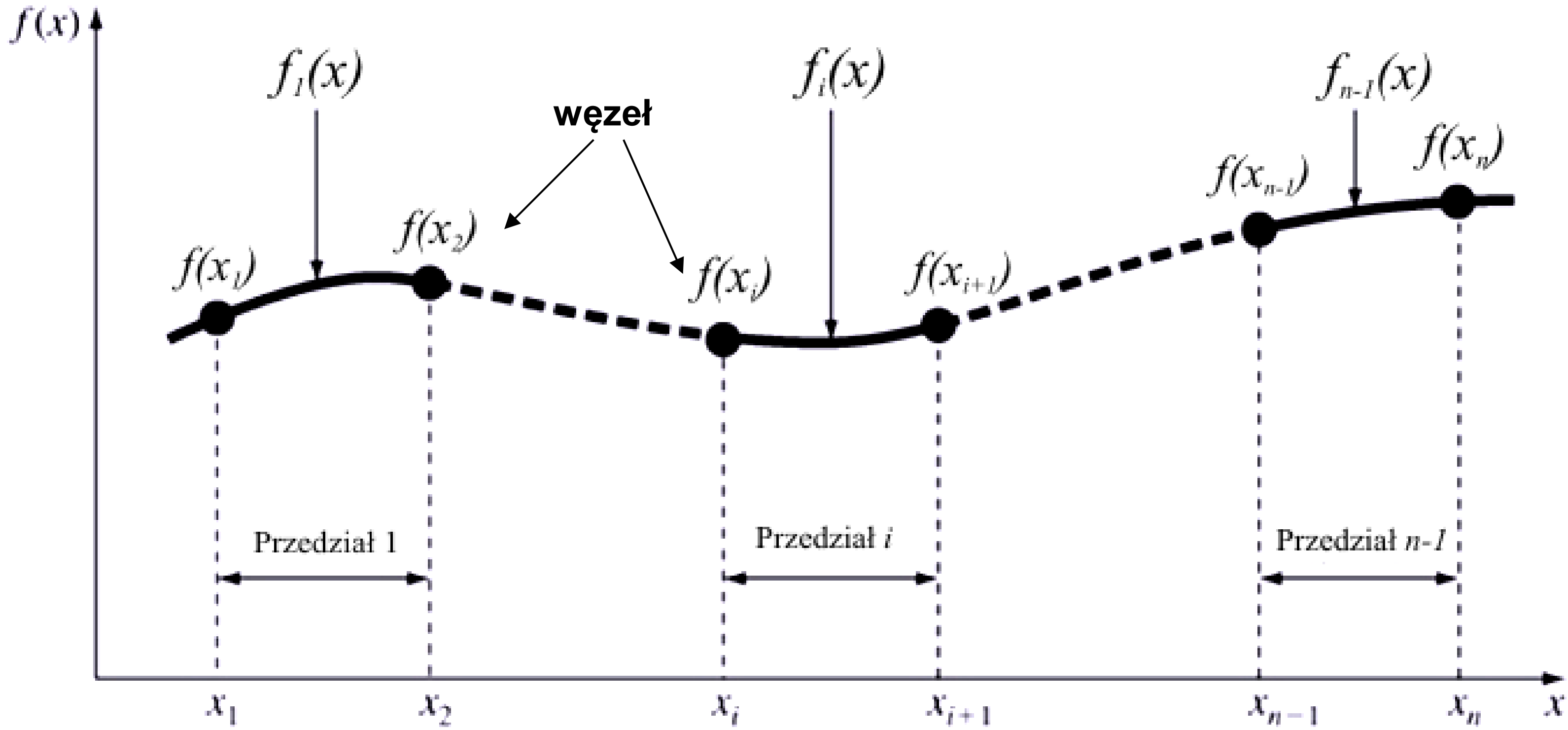
Idea

- **Zastosować wielomiany niższych stopni do mniejszej liczby punktów (podzielić cały zbiór punktów na przedziały)**
- **Wygładzić końce przedziałów**

Splines



Krzywa ciągła i gładka

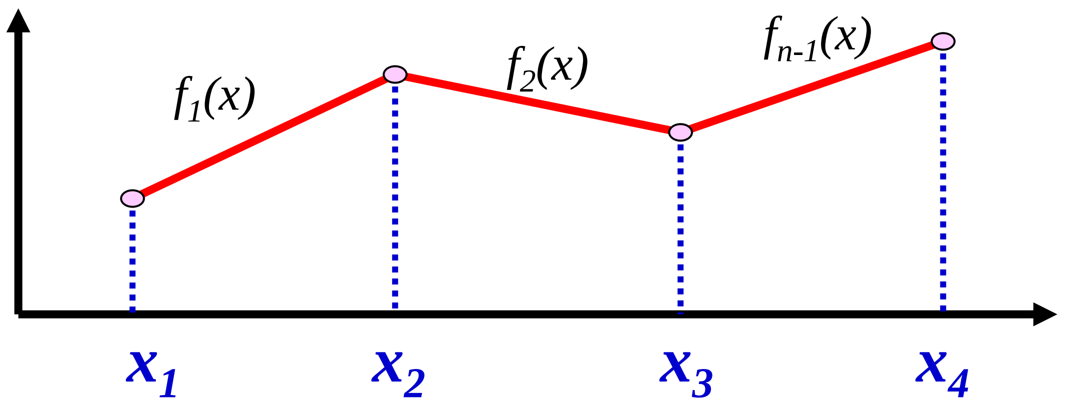


Mamy n-1 przedziałów i n punktów

$\boldsymbol{f_i(x)}$ jest wielomianem niskiego stopnia

Przykład dla $n = 4$:

Liniowe funkcje sklejane



$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \cdot y_i$$

Wielomiany Lagrange'a dla $n = 2$ punktów

$$f_i(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) f(x_1) + \left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) f(x_2), & x_1 \le x \le x_2 \\ \left(\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3}\right) f(x_2) + \left(\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}\right) f(x_3), & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots & \\ \left(\dfrac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}\right) f(x_{n-1}) + \left(\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\right) f(x_n), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

Kwadratowe funkcje sklejane

Mamy dane n punktów i n-1 przedziałów.
Wielomian kwadratowy w i-tym przedziale:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad \texttt{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Mamy n-1 równań i $3(n$-$1) =$ **$3n$-3** niewiadomych.

1. Każdy wielomian $f_i(x)$ musi przechodzić przez punkty na końcach przedziału:

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i \quad \texttt{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \quad \texttt{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Daje to nam $2(n$-$1) =$ **$2n$-2** równań.

2. W węzłach nachylenia (pierwsze pochodne) wielomianów z sąsiednich przedziałów muszą być jednakowe (nie dotyczy to skrajnych węzłów).

$$f'(x) = 2a_i x + b_i$$

$$2a_{i-1} x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \quad \texttt{dla} \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

Daje to nam ***n-2*** równań.

3n-3 = 2n-2 + n-2 + jeszcze jedno.

3. Druga pochodna w pierwszym punkcie (x_1, y_1) równa jest zero.

$$f_1''(x) = 2a_1$$

$$a_1 = 0$$

Zatem pierwsze dwa punkty łączymy prostą linią.

Przykład:

Znajdź wielomiany sklejane dla:

x	y
-1	-5
0	4
2	-2
5	19
6	58

$\boxed{f(x)=x^3-5x^2+3x+4}$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i \quad \texttt{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \quad \texttt{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$2a_{i-1} x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \quad \texttt{dla} \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

x	y
-1	-5
0	4
2	-2
5	19
6	58

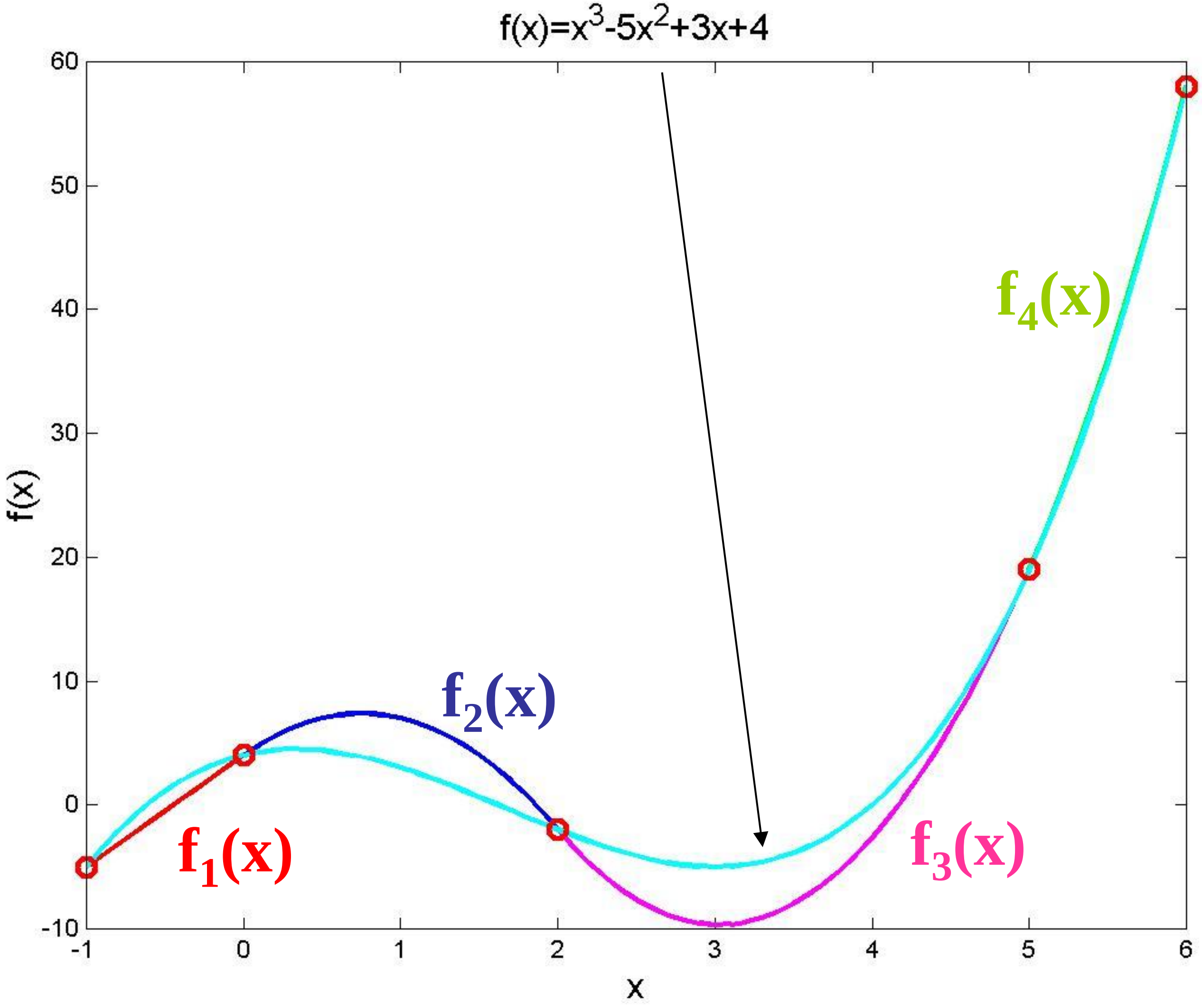
$$2n\text{-}2 \; \begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = -5 \\ c_1 = 4 \\ c_2 = 4 \\ 4a_2 + 2b_2 + c_2 = -2 \\ 4a_3 + 2b_3 + c_3 = -2 \\ 25a_3 + 5b_3 + c_3 = 19 \\ 25a_4 + 5b_4 + c_4 = 19 \\ 36a_4 + 6b_4 + c_4 = 58 \end{cases}$$

$$n\text{-}2 \; \begin{cases} b_1 - b_2 = 0 \\ 4a_2 + b_2 - 4a_3 - b_3 = 0 \\ 10a_3 + b_3 - 10a_4 - b_4 = 0 \end{cases}$$

$$1 \; \{ \; a_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 4 & 2 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 4 & 2 & 1 & & & \\ & & & & & & 25 & 5 & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 25 & 5 & 1 \\ & & & & & & & & & 36 & 6 & 1 \\ & 1 & & & -1 & & & & & & & \\ & & & 4 & 1 & & -4 & -1 & & & & \\ & & & & & & 10 & 1 & & -10 & -1 & \\ 1 & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \\ 19 \\ 19 \\ 58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 = 0 \\ b_1 = 9 \\ c_1 = -5 \\ a_2 = -6 \\ b_2 = 9 \\ c_2 = 4 \\ a_3 = 7.3 \\ b_3 = -15 \\ c_3 = -2 \\ a_4 = 10 \\ b_4 = 29 \\ c_4 = 19 \end{bmatrix}$$



Podstawowe zastosowanie kwadratowych wielomianów sklejanych:

Pomagają zrozumieć kubiczne wielomiany sklejane.

Kubiczne funkcje sklejane

Mamy dane n punktów i n-1 przedziałów.
Wielomian sześcienny w i-tym przedziale: $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ `dla` $i = 1, 2, \ldots, n-1$

Mamy n-1 równań i $4(n\text{-}1)$ = ***4n-4*** niewiadomych.

1. Każdy wielomian $f_i(x)$ musi przechodzić przez punkty na końcach przedziału.

   Daje to nam $2(n\text{-}1)$ = ***2n-2*** równań.

2. W węzłach nachylenia (pierwsze pochodne) wielomianów z sąsiednich przedziałów muszą być jednakowe (nie dotyczy to skrajnych węzłów).

   Daje to nam ***n-2*** równań.

3. W węzłach nachylenia (drugie pochodne) wielomianów z sąsiednich przedziałów muszą być jednakowe (nie dotyczy to skrajnych węzłów).

$$f_i''(x) = 6a_i x + 2b_i$$

$$6a_{i-1}x_i + 2b_{i-1} = 6a_i x_i + 2b_i \quad \texttt{dla} \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

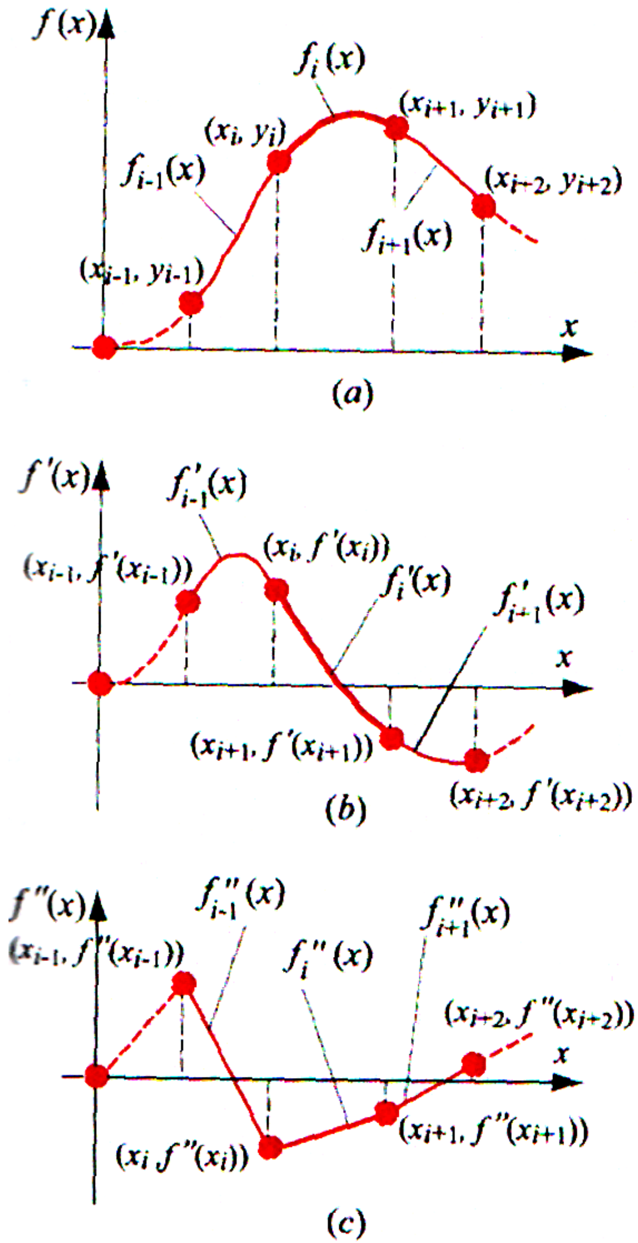
Daje to nam ***n-2*** równań.

4n-4 = 2n-2 + n-2 + n-2 + jeszcze dwa.

4. Druga pochodna w pierwszym i w ostatnim punkcie (x_1, y_1) równa jest zero.

$$6a_1 x_1 + 2b_1 = 0 \qquad 6a_{n-1}x_n + 2b_{n-1} = 0$$

Kubiczne funkcje sklejane (wielomiany Lagrange'a)



$$f_i''(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i''(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_i''(x_{i+1})$$

Gdy scałkujemy to wyrażenie dwukrotnie otrzymamy wielomian trzeciego stopnia. Dwie stałe całkowania wyznaczamy z warunku:

$$f_{i-1}(x_i) = f_i(x_i) \quad \texttt{oraz} \quad f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1})$$

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_i)}{6(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{f_i''(x_{i+1})}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3$$
$$+ \left[\frac{f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f_i''(x_i)}{6}(x_{i+1} - x_i)\right](x_{i+1} - x)$$
$$+ \left[\frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f_i''(x_{i+1})}{6}(x_{i+1} - x_i)\right](x - x_i)$$

Korzystając z warunku

$$f_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}'(x_{i+1}) \quad \texttt{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

możemy wyznaczyć nieznane $f''_i(x_i)$ oraz $f''_i(x_{i+1})$.

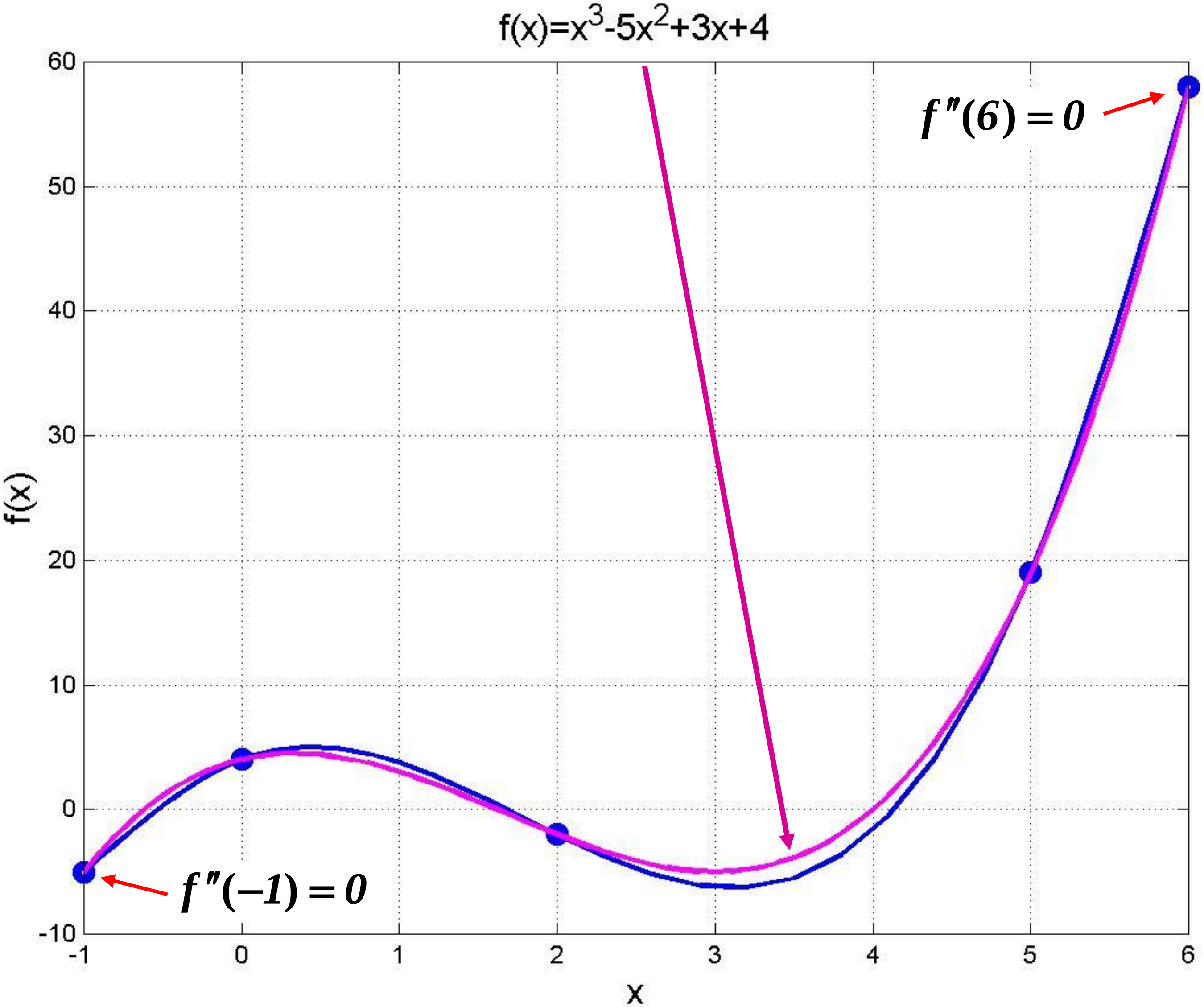
$$\boxed{\begin{aligned}&(x_{i+1}-x_i)f''(x_i)+2(x_{i+2}-x_i)f''(x_{i+1})+(x_{i+2}-x_{i+1})f''(x_{i+2})\\&=6\left[\frac{f(x_{i+2})-f(x_{i+1})}{x_{i+2}-x_{i+1}}-\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right] \quad \texttt{dla} \quad i=1, 2, \ldots, n-2\end{aligned}}$$

Układ **n-2** równań liniowych z **n** niewiadomymi.

Pozostałe dwa równania uzyskujemy z warunku:

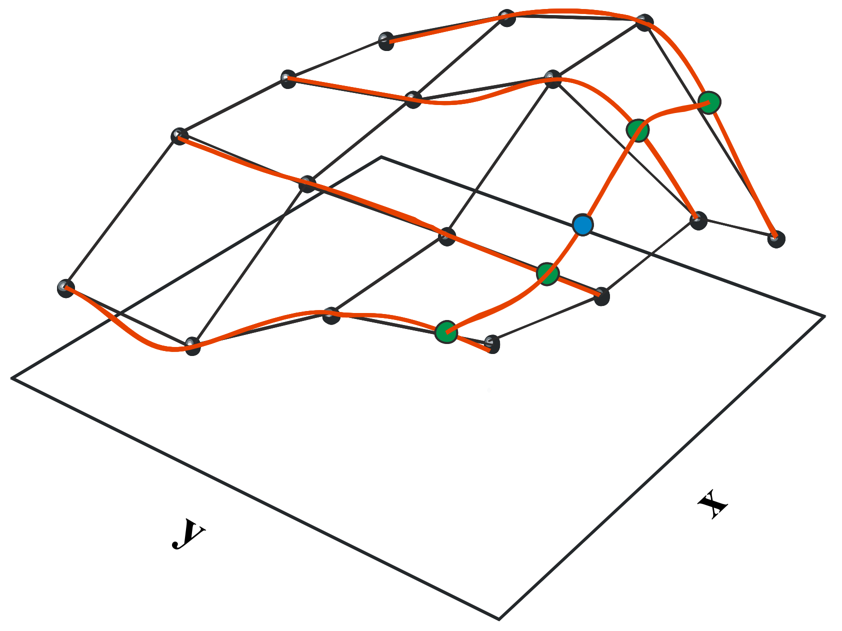
$$f''(x_1) = 0 \quad \texttt{oraz} \quad f''(x_n) = 0$$

Wniosek: mimo trudności z korzystaniem z wielomianów Lagrange'a uzyskaliśmy prostszy układ równań (n równań zamiast $4n$-4)



f(x)=x3-5x2+3x+4
f″(6) = 0
f″(−1) = 0
f(x)
x
60
50
40
30
20
10
0
-10
-1
0
1
2
3
4
5
6

Dwuwymiarowe funkcje sklejane



1. Mamy dany zbiór wartości pewnej funkcji $f(x,y)$ w węzłach dwuwymiarowej siatki kwadratowej m x n
2. Poszukujemy wartości tej funkcji w punkcie (x^*, y^*) nie będącym węzłem siatki.
3. Ustalając jedną współrzędną, np. x, obliczamy m jednowymiar. funkcji sklejanych
4. Dla każdej z tych funkcji obliczamy jej wartość dla y^*.
5. Przez zbiór m obliczonych wartości y^* prowadzimy funkcję sklejaną.
6. Obliczamy wartość tej funkcji dla x^*.