

Ćwiczenie nr PF3

Opiekun: dr hab. Piotr Fronczak

Dane kontaktowe do opiekuna: e-mail: piotr.fronczak@pw.edu.pl, pok. 101 GF

Temat: **Faktale i chaos w odwzorowaniu logistycznym**

Celem ćwiczenia jest analiza rozwiązań chaotycznych obserwowanych w równaniu logistycznym, narysowanie obiektu fraktalnego (zbioru Mandelbrota) oraz zbadanie związku między tymi dwoma różnymi obiektami matematycznymi.

Zbiór Mandelbrota [1] tworzą punkty $c \in \mathbb{C}$ na płaszczyźnie zespolonej, dla których ciąg $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany równaniem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, \end{cases} \quad (1)$$

nie dąży do nieskończoności, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq \infty. \quad (2)$$

Można wykazać (co ułatwia implementację numeryczną), że powyższy warunek jest równoważny z:

$$\forall n \in \mathbb{N} |z_n| < 2. \quad (3)$$

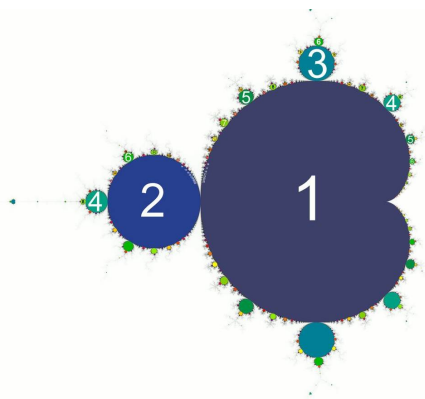
Odwzorowanie logistyczne ma postać:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad (4)$$

gdzie $x \in \langle 0, 1 \rangle$, zaś $r \in \langle 0, 4 \rangle$. Odwzorowanie to stanowi paradygmat modelu generującego chaos deterministyczny, a jego diagram bifurkacyjny - zwany drzewem Feigenbauma - jest jednym z najbardziej charakterystycznych obrazów dynamiki nieliniowej (o tym, w jaki sposób uzyskać drzewo Feigenbauma i co ono przedstawia można przeczytać w [2]).

Zbiór Mandelbrota

1. Należy narysować zbiór Mandelbrota (poprzez iterowanie równania (1) dla różnych wartości zmiennej c w przestrzeni zespolonej) (patrz rysunek 1).
2. Należy wykonać kilka iteracji równania (1) dla różnych wartości zmiennej c i $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ (lub 20), przy czym wartości c należy wybrać z różnych obszarów zbioru Mandelbrota. Jak należy interpretować liczby na rysunku 1? Należy wykonać odpowiednie rysunki, tj. na osi poziomej krok iteracji n , a na osi pionowej część rzeczywistą z_n , czyli $\text{Re}(z_n)$. Ważne: odwzorowanie logistyczne (4) zachowuje się w bardzo podobny sposób, gdy odpowiednio dobierzemy parametr r .
3. Należy zbadać zachowanie się rozwiązań równania (1) dla parametru c leżącego na osi liczb rzeczywistych, czyli na osi symetrii zbioru Mandelbrota. Zmieniając c od 0,5 do -2 należy przeanalizować równanie (1) w taki sam sposób, jak zrobiono to dla odwzorowania logistycznego. Należy stworzyć diagram bifurkacyjny tzn. dla ustalonych wartości $c \in \langle 0, 5; -2 \rangle$ narysować punkty ciągu, np. $\Re(z_n) : n = 20, \dots, 50$.



Rysunek 1: Zbiór Mandelbrota.

Źródła:

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set

[2] <https://www.iflscience.com/editors-blog/what-do-horny-bunnies-and-psychedelic-fractals-have-in-common-the-logistic-map/>