Ćwiczenie nr MO2
Opiekun: mgr inż. Mateusz Ozimek
Dane kontaktowe do opiekuna: e-mail: mateusz.ozimek@pw.edu.pl
Temat: Chaotyczne zachowania wahadła podwójnego

Celem ćwiczenia jest zdobycie umiejętności numerycznego rozwiązania równań ruchu dla pojedynczego i podwójnego wahadła matematycznego i interpretacja uzyskanych wyników.

1. Wahadło pojedyncze

Równanie opisujące ruch wahadła ma postać:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0, \tag{1}$$

gdzie *l* – długość wahadła, *g* – przyspieszenie ziemskie, zaś γ - współczynnik tarcia.

Równanie to należy zdyskretyzować i rozwiązać metodą iteracyjną (Eulera) dla różnych początkowych wychyleń wahadła i współczynnika tarcia.

2. Wahadło podwójne

Podwójne wahadło złożone to takie, które składa się z dwóch połączonych prętów. W wahadle złożonym masa rozkłada się jednorodnie na całej jego długości, dlatego na energię mechaniczną całości składają się: energia kinetyczna, energia potencjalna i energia ruchu obrotowego każdego z prętów.

W poniższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia/założenia:

$m_1 = m_2 = m$ – masy obydwu prętów,
$l_1 = l_2 = l$ – długości prętów,
θ_1, θ_2 – kąty, jakie każdy z prętów tworzy z pionem.
Umieszczając początek kartezjańskiego układu odniesienia w punkcie zawieszenia pierwszego pręta, współrzędne położenia środka masy obydwu prętów wynoszą:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l}{2} sin\theta_1, \\ y_1 = -\frac{l}{2} cos\theta_1, \end{cases} \tag{2}$$

oraz

$$\begin{cases} x_2 = l(sin\theta_1 + \frac{1}{2} sin\theta_2), \\ y_2 = -l(cos\theta_1 + \frac{1}{2} cos\theta_2). \end{cases} \tag{3}$$

Aby opisać ruch takiego wahadła należy rozwiązać układ 4 równań różniczkowych, w których zmiennymi są kąty: θ_1 i θ_2, które pełnią rolę tzw. współrzędnych uogólnionych, oraz ich tzw. pędy uogólnione: p_1 i p_2. Równania te mają postać:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{6}{ml^2} \frac{2p_1 - 3cos(\theta_1 - \theta_2)p_2}{16 - 9cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{\theta}_2 = \frac{6}{ml^2} \frac{8p_2 - 3cos(\theta_1 - \theta_2)p_1}{16 - 9cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{p}_1 = -\frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\frac{g}{l} sin\theta_1), \\ \dot{p}_2 = -\frac{1}{2} ml^2 (-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} sin\theta_2). \end{cases} \tag{4}$$

Należy przedstawić zależności $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$ dla różnych początkowych wychyleń. Po jakich torach poruszają się środki mas obydwu prętów? Narysuj kilka takich torów dla różnych warunków początkowych $\vec{r}_1(\mathrm{t}) = [x_1, y_1]$ i $\vec{r}_2(\mathrm{t}) = [x_2, y_2]$. Wizualizacja poruszającego się wahadła byłaby mile widziana.

Inspiracja: https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum.