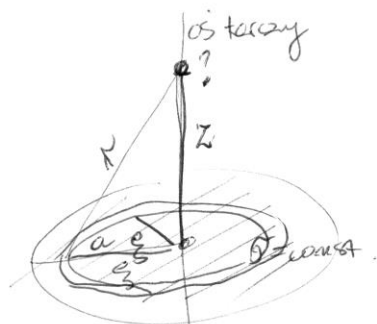


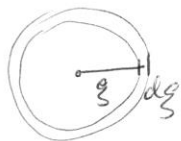
zad. 1.3

Uzysnać potencjał i natężenie pola elektrostatycznego na osi
jednorodnie naładowanej tarczy o promieniu a .
Gęstość powierzchniowa ładunku na tarczy jest stała i równa σ .



1) Potencjał odł. punkt.: $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$
w odległ. r od tego ładunku:

2) Potencjał w dowolnym punkcie na powierzchni o prom. a i
grubości dz tego samego ład. od punktu z
na osi. Zatem potencjał w
tym punkcie od pierścienia jest:



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a dz \sigma}{r} = \frac{1}{2} \frac{\sigma dz}{\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

3) Sumując potencjały od wszystkich pierścieni składających
się na tarczę dysku o promieniu a dostajemy:

$$V(z) = \int_0^a \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \left| \frac{z^2 + a^2 = t^2}{2z dz = 2t dt} \right| = \int_0^a \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{t dt}{\sqrt{t^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} t \Big|_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{z^2 + a^2} \Big|_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|)$$

Natężenie pola elektrostat.

$$\vec{E}(z) = -\text{grad } V = \left[-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right] = \left[0, 0, -\frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

$$\vec{E}(z) = [0, 0, \vec{E}_z(z)]$$

↑
w kierunku osi oz; składowe $\vec{E}_z$ wzdłuż osi oz
zależy tylko od z i nie zależy od x i y

$$E_z(z) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} + |z|) \right) =$$

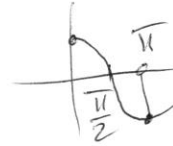
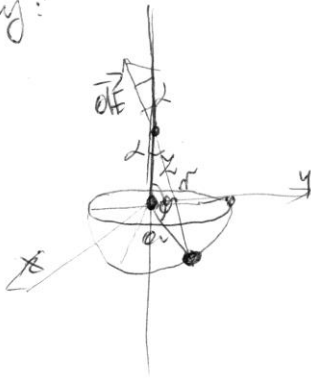
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\pm 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \cdot 2z \right) \quad \text{dla } a \rightarrow \infty$$

↑
w zależności
od tego czy
 $z > 0$, czy $z < 0$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\pm 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

stałe pole
od przesunięcia!

pole od jednoczasowej nieobciążonej ^{potężny} ~~rodziny~~ ^{rodziny} ładunków o
 odst. powierzchni $\sigma = \text{const.}$ na wysokości z nad równianną
 sferą:



elementy powierzchni sfer: $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$
 to ładunki punktowe $dq = \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\phi$,
 które u punkcie ~~z~~ na osi o z wywołują pole
 $z > 0$

o natężeniu: $|\vec{dE}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$

i potencjału $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}}$

potencjał na osi o z jest sumą potencjałów od Tool- elementarnych.
 $V(z)_{\text{os}} = \int dV = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma a^2 \frac{\sin \theta}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}} \right)$
 po powierzchni sfer

$$= \left\{ \begin{array}{l} a^2 + z^2 - 2az \cos \theta = t \\ -2az(-\sin \theta) = \frac{dt}{d\theta} \\ 2az \sin \theta d\theta = dt \\ \sin \theta d\theta = \frac{dt}{2az} \end{array} \right. = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\frac{dt}{2az}}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2az} \left| \sqrt{t} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \frac{1}{2az} \cdot \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\sigma a}{\epsilon_0 z} \left(\sqrt{a^2 + z^2 + 2az} - \sqrt{a^2 + z^2} \right)$$

$$= \frac{\sigma a}{\epsilon_0 z} \left((a+z) - \sqrt{a^2 + z^2} \right)$$