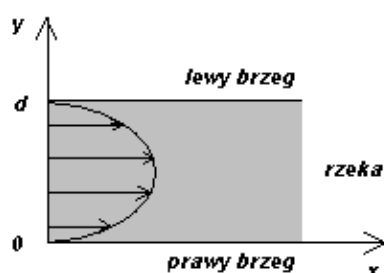


Fizyka Ogólna

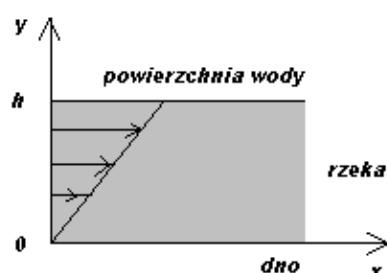
Ćwiczenia nr 1.

Operator nabla. Gradient, dywergencja, rotacja pola wektorowego.

0. Dany jest wektor $\vec{a} = [xy, xyz, z/y]$. Znajdź dywergencję i rotację tego wektora.
1. Dane jest pole wektorowe: $\vec{E} = c \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{c}{r^3} [x, y, z]$ (pole elektrostatyczne od ładunku punktowego). Wyznacz dywergencję i rotację tego pola.
2. Pokaż, że pole elektrostatyczne od ładunku punktowego spełnia zależność:
 $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\text{grad}\varphi$, gdzie φ jest potencjałem pola.
3. Czy siła $\vec{F} = [2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2]$ jest siłą zachowawczą? Jeśli tak, proszę znaleźć energię potencjalną pola opisanego przez tę siłę.
Odpowiedź: $E_0 = 2xy - x^2z^2 + 3y^2z + \text{const}$
4. Wektor prędkości wody w rzece wyraża się wzorem $\vec{v} = [v_0 \sin(y\pi/d), 0, 0]$, gdzie d jest szerokością rzeki, zaś y oznacza odległość od brzegu (patrz rysunek 1a). W którym miejscu w rzece postają wiry? Gdzie wirowość jest największa?
Odpowiedź: Wirowość (rotacja) jest największa przy brzegach i wynosi $[0, 0, v_0\pi/d]$ przy lewym brzegu i $[0, 0, -v_0\pi/d]$ przy prawym brzegu. Na środku rzeki wirowość znika.



rysunek 1a



rysunek 1b

5. Wektor prędkości wody w rzece wyraża się wzorem: $\vec{v} = [\alpha y, 0, 0]$, gdzie $\alpha > 0$, zaś y oznacza głębokość rzeki (patrz rysunek 1b). W którym miejscu w rzece powstają wiry? Gdzie wirowość rzeki jest największa?

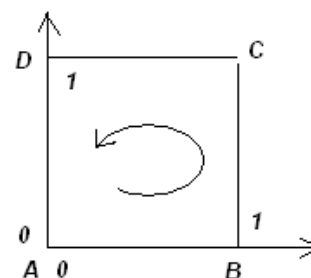
Odpowiedź: Wiry powstają na każdej głębokości i wirowość (rotacja) nie zależy od głębokości.

6. Oblicz pracę siły $\vec{F} = [y, -x]$ na konturze ABCD (patrz rysunek 2). Skorzystaj z prawa Stokesa.
Odpowiedź: Praca $W=2$.

7. Oblicz ile wynosi: $\nabla \times \nabla \varphi$, gdzie φ potencjał pewnego pola skalarnego.

Odpowiedź: $\nabla \times \nabla \varphi = \text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$.

8. Pokaż, że dla dowolnego pola wektorowego $\vec{a}$ prawdziwa jest zależność: $\nabla \circ (\nabla \times \vec{a}) = \text{div}(\text{rot}\vec{a}) = 0$.



rysunek 2