

Fizyka Ogólna

Ćwiczenia nr 12.

Fizyka statystyczna, pojęcia mikro – i makro- stanu

1. Rozważ układ o stałej energii E oraz o stałej liczbie cząstek N . Oblicz liczbę możliwych mikrostanów W tego układu. Załóż, że energia układu $E \geq 0$ jest skwantowana $\Delta E = 1$. Nie nakładaj żadnych ograniczeń na energię pojedynczej cząstki oraz potraktuj cząstki jako rozróżnialne.

Odpowiedź: $W = \binom{N-1+E}{E}$.

2. Ile wynosi liczba mikrostanów układu z zadania 1, jeśli żadna cząstka nie ma energii równej zero?

Odpowiedź: $W = \binom{E-1}{N-1}$

3. Rozważ układy N niezależnych cząstek

i. klasycznych,

ii. kwantowych o spinie całkowitym (tj. bozonów),

iii. kwantowych o spinie połowkowym (tj. fermionów).

Zakładając, że pojedyncza cząstka może przebywać w R stanach jednocząstkowych, oblicz, ile wynosi liczba mikrostanów każdego z wymienionych układów.

Wskazówka: Zadanie to można sprowadzić do kombinatorycznego problemu rozmieszczania kul w pudełkach. Cząstki klasyczne należy traktować jako rozróżnialne, natomiast kwantowe jako nierozróżnialne.

Odpowiedź: i) $W = R^N$ ii) $W = \binom{R-1+N}{N}$ iii) $W = \binom{R}{N}$

4. *Prosty model wymiany ciepła.* Rozważ układ składający się z dwóch odizolowanych od siebie części: A oraz B, z których każda zawiera dwie rozróżnialne cząstki. Niech energie podukładów wynoszą odpowiednio $E_A = 5$, zaś $E_B = 1$.

i. Oblicz, ile wynosi liczba mikrostanów opisanego układu $W(A+B)$?

ii. Jak zmieni się liczba mikrostanów tego układu, jeśli rozważymy swobodny przepływ energii między A i B?

iii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po usunięciu izolacji adiabatycznej energia podukładu A wzrośnie?

iv. Jaki podział energii między podukładami A i B odpowiada stanowi równowagi układu $A+B$?

Odpowiedź: i) $W(A+B) = 12$ ii) $W(A+B) = 84$ iii) $P(E_A > 5) = 7/84$ iv) $E_A = E_B = 3$

Rozkład kanoniczny w fizyce statystycznej

5. Rozważ układ, który może przebywać w pięciu mikrostanach o energiach odpowiednio równych: $0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon$. Oblicz średnią energię tego układu w temperaturze T .

Odpowiedź: $\langle E \rangle = \frac{\varepsilon(3e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon})}{1 + 3e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}}$.

6. Rozważ układ składający się z dwóch niezależnych i rozróżnialnych cząstek. Załóż, że każda cząstka może przebywać w jednym z dwóch mikrostanów o energiach równych 0 i ε . Oblicz sumę statystyczną i średnią energię układu. Załóż, że temperatura układu jest stała i równa T . Jak zmieni się suma statystyczna i energia układu, gdy przyjmiemy, że badany układ składa się z N niezależnych cząstek.

Wskazówka: Skorzystać z cechy multiplikatywności sumy statystycznej.

Odpowiedź: $Z_2 = (Z_1)^2 = (1 + e^{-\beta\varepsilon})^2, \langle E \rangle = \frac{2\varepsilon}{1 + e^{-\beta\varepsilon}};$

$Z_N = (Z_1)^N = (1 + e^{-\beta\varepsilon})^N, \langle E \rangle = \frac{N\varepsilon}{1 + e^{-\beta\varepsilon}};$

7. Zbadaj układ złożony z trzech fermionów będących w kontakcie z otoczeniem o temperaturze T . Załóż, że każdy fermion może przebywać w jednym z czterech stanów kwantowych o energiach równych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Wypisz wszystkie mikrostany układu. Wyznacz jego sumę statystyczną. Oblicz średnią energię i średnią liczbę fermionów w stanie o energii ε_1 .

Odpowiedź: 4 stany $\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{0, 1, 1, 1\}, \{1, 0, 1, 1\}, \{1, 1, 0, 1\}, \{1, 1, 1, 0\}$

$Z(\beta) = \exp[-\beta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)] + \exp[-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)] + \exp[-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)] + \exp[-\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)]$

$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}, \langle n_1 \rangle = \sum_{\Omega} n_1(\Omega) P(\Omega) = \sum_{\Omega} n_1(\Omega) \frac{\exp[-\beta E(\Omega)]}{Z} = 1 - \exp[-\beta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)] / Z.$

8. Rozważ układ składający się z trzech bozonów i będący w kontakcie z otoczeniem o temperaturze T . Załóż, że bozony mogą przebywać trzech stanach o energiach równych $0, \varepsilon, 2\varepsilon$. Wypisz wszystkie mikrostany układu, oblicz średnią liczbę bozonów w stanie o energii ε . Oblicz średnią energię tego układu w temperaturze T .

Odpowiedź: Bozony to nierozróżnialne cząstki kwantowe, których nie obowiązuje zakaz Pauliego: 10 mikrostanów:

$\Omega = \{n_1, n_2, n_3\} = \{1, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 1\}, \{1, 2, 0\}, \{1, 0, 2\}, \{2, 1, 0\}, \{2, 0, 1\}, \{3, 0, 0\}, \{0, 3, 0\}, \{0, 0, 3\}$

gdzie $\{n_1, n_2, n_3\}$ oznaczają liczby bozonów o energii $0, \varepsilon, 2\varepsilon$. Znając mikrostany łatwo można wyznaczyć energię każdego z nich. Na przykład energia pierwszego jest równa $E(\{1, 1, 1\}) = 0 + \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$.

Sumę statystyczną wyznaczamy ze znanego wzoru, podobnie średnią energię.

9. (*) Rozważ układ N niezależnych i rozróżnialnych cząstek, z których każda może przebywać w jednym z dwóch mikrostanów o energiach: $\pm \varepsilon$. Oblicz średnią energię tego układu w temperaturze T .

Odpowiedź: $Z_N = (Z_1)^N = (2 \cosh[\beta \varepsilon])^N$, $\langle E \rangle_N = N \langle E \rangle_1 = N \varepsilon \tanh[\beta \varepsilon]$

10. (*) Wyznacz średnią energię kwantowego oscylatora harmonicznego. Przyjmij, że temperatura otoczenia jest równa T .

Wskazówka: Energia oscylatora jest skwantowana i wynosi $\varepsilon(n) = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar \omega$, gdzie $n=0, 1, 2, \dots$

Odpowiedź: $\langle E \rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}\right) \hbar \omega$.

11. (**) Wyznacz energię układu N niezależnych i rozróżnialnych klasycznych, jednowymiarowych oscylatorów harmoniczych. Przyjmij, że temperatura układu jest

stała i równa T . Energia, pojedynczego oscylatora jest równa: $\varepsilon = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2$.

Wskazówka: 1. Rozważane oscylatory są jednowymiarowe, dlatego objętość elementarnej komórki w przestrzeni stanów jest równa h (tj. „jednocząstkową sumę statystyczną”

należy podzielić przez h); 2. Całka Gaussa: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$.

Odpowiedź: $Z_N = (Z_1)^N = \left(\frac{1}{\hbar \omega \beta}\right)^N$, $\langle E \rangle = \frac{N}{\beta} = N k_B T$.

i jeszcze kilka łatwych zadań ...

12. Wyznacz średnią energię układu złożonego z 3 rozróżnialnych cząstek, z których każda może przebywać w jednym z dwóch stanów, o energiach równych: $0, 2\varepsilon$. Załóż, że temperatura układu jest stała i równa T .

Suma stanów pojedynczej cząstki:

$$Z_1 = e^{-\beta \cdot 0} + e^{-\beta 2\varepsilon} = 1 + e^{-\beta 2\varepsilon}$$

Suma trzech cząstek

$$Z_3 = (Z_1)^3 = (1 + e^{-\beta 2\varepsilon})^3$$

Średnia energia trzech cząstek

$$\begin{aligned} \langle E_3 \rangle &= - \frac{\partial \ln Z_3}{\partial \beta} = 3 \cdot \left(- \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} \right) = 3 \cdot \frac{-1}{1 + e^{-\beta 2\varepsilon}} \cdot (-2\varepsilon) \cdot e^{-\beta 2\varepsilon} = \\ &= 6\varepsilon \frac{1}{1 + e^{-\beta 2\varepsilon}} \end{aligned}$$

10

13. Wyznacz średnią energię układu złożonego z 10 rozróżnialnych cząstek, z których każda może przebywać w jednym z trzech stanów, o energiach równych: 0, ϵ , 2ϵ . Załóż, że temperatura układu jest stała i równa T.

Z_1 = suma stat. pojedynczej cząstki

$$Z_{10} = (Z_1)^{10}$$

$$Z_1 = 1 + e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon}$$

$$\langle E_{10} \rangle = 10 \langle E_1 \rangle = 10 \left(-\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} \right) = \dots$$

14. Zasada Pottera mówi, że w jednym stanie kwantowym nie może znajdować się samotny fermion. Zbadaj układ złożony z 5 nierozróżnialnych fermionów będących w kontakcie z otoczeniem o temperaturze T. Załóż, że każdy fermion może przebywać w jednym z dwóch stanów kwantowych o energiach równych ϵ i 2ϵ . Wyznacz sumę statystyczną układu i oblicz średnią liczbę fermionów w stanie o energii ϵ .

mikrostanowy sposób:

$\Omega_1 = \{n_\epsilon, n_{2\epsilon}\}$, gdzie n_ϵ - liczba ferm. w stanie o energii ϵ
 $n_\epsilon \neq 0, 1$, tj. $n_\epsilon, n_{2\epsilon} = 0, 1$

$$\Omega_1 = \{ \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 0\}, \{1, 1\} \}$$

$$E(\Omega_1) = \{0\epsilon, \epsilon, 0\epsilon, 2\epsilon\}$$

Suma stat.

$$Z = \sum_{\Omega_1} e^{-\beta E(\Omega_1)} = e^{-0\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon} + e^{-0\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon}$$

Śr. liczba ferm. w stanie o en. ϵ :

$$\langle n_\epsilon \rangle = \sum_{\Omega_1} n_\epsilon(\Omega_1) P(\Omega_1) = \left| P(\Omega_1) = \frac{e^{-\beta E(\Omega_1)}}{Z} \right| =$$

$$= \frac{2 \cdot e^{-0\beta\epsilon} + 1 \cdot e^{-\beta\epsilon} + 0 \cdot e^{-0\beta\epsilon} + 1 \cdot e^{-2\beta\epsilon}}{Z}$$