

Fizyka Ogólna

Zestaw nr 11.

Równanie Schrödingera, prąd prawdopodobieństwa

1. Wyznacz ogólny wzór na prąd prawdopodobieństwa $j(x, t)$.
Skorzystaj z równania ciągłości:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x},$$

gdzie $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$.

Wskazówka: Wykonując różniczkowanie funkcji falowej $\Psi(x, t)$ po czasie należy skorzystać z równania Schrödingera zależnego od czasu.

Odpowiedź: $j(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right)$

2. Wyznacz prąd prawdopodobieństwa dla cząstki, której funkcja falowa jest ma postać:

$$\Psi(x, t) = Ae^{\pm ikx - i\omega t}.$$

Skorzystaj ze wzoru wyprowadzonego w poprzednim zadaniu. Wiedząc, że powyższa funkcja falowa opisuje swobodną cząstkę kwantową o pędzie $|p| = \hbar k$ (patrz zad. 3/10), zinterpretuj uzyskany wynik. (por. notatki z wykładu dra Mrowińskiego)

Odpowiedź: $j(x, t) = \pm \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = \pm v |A|^2$.

3. Wyznacz prąd prawdopodobieństwa dla cząstki, której funkcja falowa jest ma postać:

$$\Psi(x, t) = Ae^{kx - i\omega t}.$$

Zinterpretuj uzyskany wynik.

Odpowiedź: $j(x, t) = 0$.

Uwaga: Funkcja falowa $\Psi(x, t) = Ae^{kx - i\omega t} = \psi(x)e^{-i\omega t}$ reprezentuje stan stacjonarny, tj. taki stan, w którym $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$ nie zależy od czasu. Z równania ciągłości (zad. 1/11) wynika zatem, że prąd prawdopodobieństwa jest nie zależy od x .

4. Wyznacz prąd prawdopodobieństwa dla cząstki w nieskończonej studni potencjału o szerokości a (patrz zad. 4/10). Załóż, że cząstka znajduje się w stanie stacjonarnym:

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right] \exp\left[-i \frac{E_n t}{\hbar}\right], \quad \text{gdzie} \quad E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}.$$

Jak zmieni się prąd prawdopodobieństwa, gdy rozważymy cząstkę znajdującą się w stanie będącym kombinacją liniową n -tego i m -tego stanu stacjonarnego:

$$\Psi_{n,m}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_n(x,t) + \Psi_m(x,t)).$$

Odpowiedź: $j_n(x,t) = 0$,

$$j_{n,m}(x,t) = \frac{\hbar\pi}{2ma^2} \left((n+m) \sin\left[\frac{(n-m)\pi x}{a}\right] - (n-m) \sin\left[\frac{(n+m)\pi x}{a}\right] \right) \sin\left[\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}\right].$$

5. Korzystając ze wzoru na prąd prawdopodobieństwa, wyznacz współczynnik odbicia, R, i transmisji, T, dla cząstki, która porusza się w kierunku dodatnim osi ox , w potencjale schodkowym postaci:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-\infty, 0] \\ V_0 & \text{dla } x \in [0, +\infty] \end{cases}$$

Rozważ dwa przypadki: a) energia cząstki $E > V_0$, b) energia cząstki $E < V_0$.

(por. notatki z wykładu dra Mrowińskiego)

Uwaga: Pęd cząstki padającej na barierę potencjału jest równy: $p_1 = \hbar k_1 = \sqrt{2mE}$.

Odpowiedź: a) dla $E > V_0$ mamy: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$,

$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$; b) dla $E < V_0$ mamy: $R = 1$, $T = 0$.

5. Wyznacz współczynnik odbicia R i transmisji T dla cząstki o energii $E > 0$, która porusza się w kierunku dodatnim osi ox , w potencjale o kształcie odwróconego stopnia o głębokości V_0 , tj.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-\infty, 0] \\ -V_0 & \text{dla } x \in [0, +\infty] \end{cases}$$

Odpowiedź: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$, gdzie $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

zad 1 / 11

Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial j(x,t)}{\partial x},$$

gdzie $P(x,t) = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$

ideal:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\psi \cdot \psi^*) = \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi =$$

= z równ. Schrödingera
zelem. od czasu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{iV(x,t)}{\hbar} \right] \cdot \psi \\ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{iV}{\hbar} \right]^* \psi^* \\ &= \left[-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{iV}{\hbar} \right] \psi^* \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{iV}{\hbar} \right] \psi \cdot \psi^* + \psi \left[-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{iV}{\hbar} \right] \psi^* =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \cdot \psi^* - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* \cdot \psi \right) + \left(-\frac{iV}{\hbar} + \frac{iV}{\hbar} \right) \psi \psi^* =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \cdot \psi^* + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \right]$$

$\vec{j}$ chdło.

UWAGA 1:

Wym. ciągłości dla prądu
przewod. w Med. krant.
jest podobne do mior.
ciągłości dla ładunku.

$$\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ρ - gęstość ładunku
 $\vec{j}$ - wekt. gęstości prądu elektr.
który przyp. id. mowy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}$$

UWAGA 2:

W Med. krant $j(x,t)$ (kierunek)
oznacza "przepływ"
przewod. przez dany
punkt w "podanej chwili"
 $j(x,t)$ można wyobrazić
sobie jak "kierunek"
który "przepływa" przez
punkt x w t .

20013/11

$$j(x,t) = ?$$

$$\text{dla } \psi(x,t) = A e^{kx - i\omega t}$$

$$\text{stad } \psi^*(x,t) = A e^{kx + i\omega t}$$

podst. do wzoru z zad 1/11 dostajemy:

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left(A e^{kx + i\omega t} \cdot A k e^{kx - i\omega t} - A k e^{kx + i\omega t} A e^{kx - i\omega t} \right) =$$

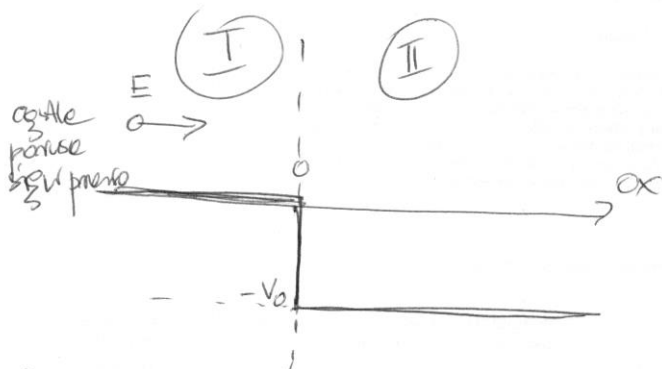
$$= 0$$

gdz. układ jest w stanie stacjonarnym (od czasu potencjału $V(x,t) = V(x)$ wtedy $P(x,t) = |\psi|^2 = P(x)$ nie zależy od czasu i $j \equiv 0$. (nie ma przepływu cz. n.)

zad 6/11

3

$$V = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ -V_0 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$



- 1) Cząstka w tym zadaniu ma energię $E > 0$. Z klasycznego punktu widzenia gdyby bariera miała kształt to na obszarze Δx działałaby na cząstkę siła $F = -\frac{\partial V}{\partial x} = \text{const}$ w kierunku $\oplus$ osi ox .
- Ta siła wykonując pracę nad cząstką zwiększa jej energię o V_0 . Tj. w obszarze (I) energia cząstki jest E
 " " (II) " " jest $E + V_0$
- Ponadto cząstka "bez przeszkód" przelatuje przez ten skok potencjału.

- 2) W KED kwantowej jest inaczej!

Okazuje się że cząstka może się "odbić" od skoku potencjału i polecieć w lewo!

Rozwiązanie:

W obszarze (I) ogólna postać f. falowej:

$$\psi^{(I)} = A \cdot e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

"fala padająca"
odpowiadająca częstocie poruszającej się w prawo

"fala odbita"
odpowiadająca częstocie poruszającej się w lewo

W obszarze II energia całkowita

jest

$$E + V_0$$

zład

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

$$\psi^{(II)} = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$$

= 0 (bo jak cząstka wchodzi do obszaru II to już nie może wrócić do obszaru I)

"fala" odpow.
częstocie poruszającej się w stałym potencjale w prawo

"fala" = f. falowa odp. częstocie i energii $(E+V_0)$ porusza się w lewo.

Współczynniki T i R obliczymy jako ilorazy prawdopodobieństw (które interpretujemy jako "liczby cząstek") funkcji falowych odpowiadających cząstkom cząstkom poruszającym się w odp. obszarach (I) i (II) i odpowiednim kierunkom:

T (transmisja, przejście przez próg)

$$T = \frac{|j_{\psi^{(II)}}|}{|j_{\psi^{(I)}}|} = \frac{\text{(liczba cząstek które w obszarze I-yim poruszają się w prawo)}}{\text{(liczba cząstek które w obszarze II-yim poruszają się w prawo)}}$$

$\left| \frac{\hbar k_2}{m} C \right|^2$ dla feli $\frac{\hbar k_2}{m} C$ por. $2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2$

$$T = \frac{\frac{\hbar k_2}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2} = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

podobie

(5)

R (odbiór od bariery)

$$R = \frac{|j_{\leftarrow}^{\text{I}}|}{|j_{\rightarrow}^{\text{I}}|} = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{l. cząstek które u danej T-ytu porusza się w lewo} \\ \text{u które (tj. odbitych) od bariery} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} \text{l. cząstek które porusza się w prawo} \\ \text{które nie odbijają się od bariery} \end{array} \right)}$$

$$R = \frac{\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad (*)$$

ze wzoru (*) i (**) wynika aby wyznaczyć R musimy jedynie znaleźć stosunki amplitud f-funkcji $\frac{|C|^2}{|A|^2}$ oraz $\frac{|B|^2}{|A|^2}$

wyznaczymy je z war. ciągłości ψ i ψ' na granicy ścian potencjału:

$$\psi^{\text{I}}(0) = \psi^{\text{II}}(0) \Rightarrow A + B = C$$

$$\frac{d}{dx} \psi^{\text{I}}(0) = \frac{d}{dx} \psi^{\text{II}}(0) \Rightarrow k_1(A - B) = k_2 C$$

$\Downarrow$

$$k_1(A - B) = k_2(A + B)$$

$$A(k_1 - k_2) = B(k_2 + k_1)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

$$\Rightarrow R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

analogicznie wyznaczamy

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$