

Fizyka Ogólna

Zestaw nr 11.

Równanie Schrödingera, prąd prawdopodobieństwa

1. Wyznacz ogólny wzór na prąd prawdopodobieństwa $j(x,t)$. Skorzystaj z równania ciągłości:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x},$$

gdzie $P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$.

Wskazówka: Wykonując różniczkowanie funkcji falowej $\Psi(x,t)$ po czasie należy skorzystać z równania Schrödingera zależnego od czasu.

Odpowiedź: $j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right)$

2. Wyznacz prąd prawdopodobieństwa dla cząstki, której funkcja falowa jest ma postać:

$$\Psi(x,t) = Ae^{\pm ikx - i\omega t}.$$

Skorzystaj ze wzoru wyprowadzonego w poprzednim zadaniu. Wiedząc, że powyższa funkcja falowa opisuje swobodną cząstkę kwantową o pędzie $|p| = \hbar k$ (patrz zad. 3/10), zinterpretuj uzyskany wynik. (por. notatki z wykładu dra Mrowińskiego)

Odpowiedź: $j(x,t) = \pm \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = \pm v |A|^2$.

3. Wyznacz prąd prawdopodobieństwa dla cząstki, której funkcja falowa jest ma postać:

$$\Psi(x,t) = Ae^{kx - i\omega t}.$$

Zinterpretuj uzyskany wynik.

Odpowiedź: $j(x,t) = 0$.

Uwaga: Funkcja falowa $\Psi(x,t) = Ae^{kx - i\omega t} = \psi(x)e^{-i\omega t}$ reprezentuje stan stacjonarny, tj. taki stan, w którym $P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$ nie zależy od czasu. Z równania ciągłości (zad. 1/11) wynika zatem, że prąd prawdopodobieństwa jest nie zależy od x .

4. Wyznacz prąd prawdopodobieństwa dla cząstki w nieskończonej studni potencjału o szerokości a (patrz zad. 4/10). Załóż, że cząstka znajduje się w stanie stacjonarnym:

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right] \exp\left[-i \frac{E_n t}{\hbar}\right], \quad \text{gdzie} \quad E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}.$$

Jak zmieni się prąd prawdopodobieństwa, gdy rozważymy cząstkę znajdującą się w stanie będącym kombinacją liniową n -tego i m -tego stanu stacjonarnego:

$$\Psi_{n,m}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_n(x,t) + \Psi_m(x,t)).$$

Odpowiedź: $j_n(x,t) = 0$,

$$j_{n,m}(x,t) = \frac{\hbar\pi}{2ma^2} \left((n+m) \sin\left[\frac{(n-m)\pi x}{a}\right] - (n-m) \sin\left[\frac{(n+m)\pi x}{a}\right] \right) \sin\left[\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}\right].$$

5. Korzystając ze wzoru na prąd prawdopodobieństwa, wyznacz współczynnik odbicia, R, i transmisji, T, dla cząstki, która porusza się w kierunku dodatnim osi ox , w potencjale schodkowym postaci:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-\infty, 0] \\ V_0 & \text{dla } x \in [0, +\infty] \end{cases}$$

Rozważ dwa przypadki: a) energia cząstki $E > V_0$, b) energia cząstki $E < V_0$.

(por. notatki z wykładu dra Mrowińskiego)

Uwaga: Pęd cząstki padającej na barierę potencjału jest równy: $p_1 = \hbar k_1 = \sqrt{2mE}$.

Odpowiedź: a) dla $E > V_0$ mamy: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$,

$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$; b) dla $E < V_0$ mamy: $R = 1$, $T = 0$.

6. Wyznacz współczynnik odbicia R i transmisji T dla cząstki o energii $E > 0$, która porusza się w kierunku dodatnim osi ox , w potencjale o kształcie odwróconego stopnia o głębokości V_0 , tj.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [-\infty, 0] \\ -V_0 & \text{dla } x \in [0, +\infty] \end{cases}$$

Odpowiedź: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$, gdzie $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.