Fizyka Ogólna

Zestaw nr 9.

Funkcja falowa, równanie Schrödingera niezależne od czasu.

1. Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki w chwili t=0 ma postać:

$$\Psi(x,0)=\begin{cases} A\left(a^2-x^2\right) & dla \quad x\in[-a,a] \\ 0 & dla \quad x\notin[-a,a] \end{cases},$$

gdzie $a\in\Re_+$. Wyznacz stałą A. Jakie jest średnie położenie i pęd cząstki w chwili $t=0$?

Odpowiedź: $A=\sqrt{15/16a^5}$, $\langle x\rangle=0$, $\langle p\rangle=0$.

2. Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki ma postać: $\Psi(x,t)=Ae^{-\lambda|x|-it\omega}$, gdzie $\lambda,\omega\in\Re_+$. Wyznacz stałą A. Jakie jest średnie położenie i średni kwadrat położenia cząstki?

Odpowiedź: $A=\sqrt{\lambda}$, $\langle x\rangle=0$, $\langle x^2\rangle=1/2\lambda^2$.

3. Wyznacz funkcję falową opisującą jednowymiarową cząstkę swobodną o masie m, która ma energię kinetyczną E. Załóż, że cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi ox. Skorzystaj z niezależnego od czasu równania Schrödingera ze stałym potencjałem. Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa tego, że położenie cząstki jest z przedziału $(x,x+dx)$? Wyznacz $\langle x\rangle,\langle x^2\rangle,\langle p\rangle$ charakteryzujące tę cząstkę.

Odpowiedź: $\Psi(x,t)=\psi(x)\varphi(t)=Ae^{ikx}e^{-i\omega t}$, gdzie $k=\sqrt{2mE}/\hbar$, zaś $\omega=E/\hbar$.

Gęstość prawd.: $P(x,t)dx=A^2dx$, gdzie $A\approx 0$, ponieważ $\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,t)dx=1$.

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi x\Psi^* dx=0,\qquad \langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi x^2\Psi^* dx=\infty,\qquad \langle p\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi^* dx=\sqrt{2mE}.$$

4. Wyznacz stany stacjonarne i dozwolone wartości energii dla cząstki o masie m umieszczonej w nieskończonej studni potencjału o szerokości a. Innymi słowy: rozwiąż niezależne od czasu równanie Schrödingera dla cząstki w potencjale:

$$V(x)=\begin{cases} 0 & dla \quad x\in[0,a] \\ \infty & dla \quad x\notin[0,a] \end{cases}$$

Odpowiedź: $\psi_n(x)=C\sin[k_n x]$, gdzie $k_n=\dfrac{n\pi}{a}$ dla $n=1,2,3\ldots$. Dozwolone poziomy energii: $E_n=\dfrac{n^2h^2}{8ma}$.

POTRZEBNE WZORY

Równanie Schrödingera dla cząstki 1d.

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\right]\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)}$$

gdy $V(x,t)=V(x)$ tj. potencjał nie zależy od czasu wtedy:
rozwiązanie r. Schröd. może postać: $E=h\nu$

$$\boxed{\Psi(x,t)=\psi(x)\varphi(t) \quad \text{gdzie } \varphi(t)=e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} \; ; \quad \frac{E}{\hbar}=\omega$$

zaś $\psi(x)$ jest rozwiąz. niezależnego od czasu równ. Schrödingera:

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)}$$

Operatory:

położenie
$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,P(x,t)\,dx=\left\{\begin{array}{l}P(x,t)\,dx=\psi(x,t)\,\psi^*(x,t)\,dt\\ \boxed{\hat{x}=x}\end{array}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\cdot x\,\psi(x,t)\,dx$$

pęd:
$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\cdot\hat{p}_x\Psi(x,t)\,dx= \quad \boxed{\hat{p}_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

pęd w stanie $\Psi(x,t)$: $\quad \hat{p}_x\Psi(x,t)=p\,\Psi(x,t)$

energia
$$\langle E\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\hat{E}\Psi\,dx \quad \text{gdzie} \quad \boxed{\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}$$

Zad 2/10

$$\Psi(x,t) = A e^{-\lambda|x| - i\omega t} \quad ; \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R}_+$$

$A = ?$

$\langle x \rangle = ?$

$\langle x^2 \rangle = ?$

$\langle p \rangle = ?$

1) z interpretacji f. falowej M. Borna: $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi \equiv P(x,t)$ – gęstość prawdop.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \cdot \Psi^* dx = 1}$$ (gęstość prawdop. musi być unorm.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \underbrace{\left(e^{-\lambda|x|} \cdot \cancel{e^{i\omega t}}\right)}_{\Psi^*} \cdot \left(e^{-\lambda|x|} \cdot \cancel{e^{-i\omega t}}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\lambda|x|} dx = 2\int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} -2\lambda x = y \\ -2\lambda dx = dy \\ dx = -\frac{1}{2\lambda} dy \end{array} \right| =$$

$$= 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} dx = 2A^2 \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \int_0^{-\infty} e^y dy =$$

$$= -\frac{A^2}{\lambda} e^y \Big|_0^{-\infty} = -\frac{A^2}{\lambda}(0 - 1) = \frac{A^2}{\lambda} = 1$$

$$A^2 = \lambda$$

$$\underline{A = \sqrt{\lambda}}$$

2) średnie położenie:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}\, \Psi^* \cdot \Psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-2\lambda|x|} dx = \left| \begin{array}{l} \text{f. podcałk. jest} \\ \text{nieparzysta} \end{array} \right| = 0$$

stanie pęd nie jest określ.

3) średnie wart. pędu:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{p} \Psi \, dx = \left| \hat{p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right| = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{+\lambda|x|} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\lambda|x|} dx = \text{zespolone}$$

wart. ozu: to ie w idempi

zad 3/10

Cząstka o masie m i energii E, na którą nie działają żadne siły (tj. cząstka swobodna), i która porusza się w kierunku (+) osi OX.

1) Równ. Schrödingera niezal. od czasu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \cancel{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{V(x)}\psi(x)} = E\psi(x)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -k^2\psi(x) \quad \text{gdzie} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

rozwiązanie tego równ. można zgadnąć.
Rozwiązaniami są funkcje postaci:

$$\psi(x) = A\cdot e^{\pm ikx}$$

Pełna f. falowa badanej cząstki:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\cdot\varphi(t) = Ae^{\pm ikx}e^{-i\omega t} \quad \text{gdzie} \quad \omega = \frac{E}{\hbar} \ (\text{bo } E = h\nu)$$

Ponieważ jednak cząstka porusza się w kierunku (+) osi Ox rozwiąz. zadania jest funkcja:

$$\boxed{\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}}$$

Gdyby cząstka poruszała się w kierunku (−) osi OX, wtedy $\Psi(x,t) = Ae^{-i(kx+\omega t)}$. Stałą A można wyzn. z warunku unormowania $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\psi\,dx = 1$

2) Gęstość prawdop. znalezienia cząstki w przedziale $(x, x+dx)$ (4)

$$P(x,t) = \Psi^* \cdot \Psi$$

czyli:

$$P(x,t) = A^2$$

Stąd

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P(x,t)\, dx = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 A^2\, dx = +\infty$$

tzn. że średnie odchylenie σ_x

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \infty$$

$$\sigma_x = \infty$$

$\boxed{\Delta x = \sigma_x = \infty}$ nieoznaczoność położenia

3) pęd:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi' \, dx =$$

$$= \cancel{\int}\left(-i\hbar\right) \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-i(kx-\omega t)} \frac{\partial}{\partial x} A e^{i(kx-\omega t)} dx =$$

$$= \left(-i\hbar\right)\left(ik\right) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \cdot \Psi\, dx\right)}_{1} = \hbar k = \hbar \cdot \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \sqrt{2mE}$$

jak w klasycznej dla cząstki klasycznej.

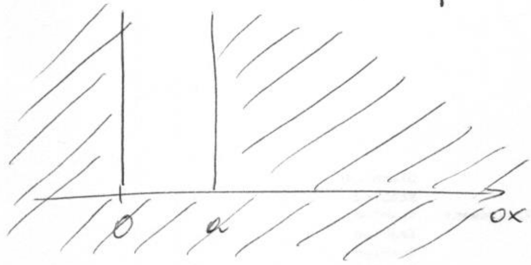
$\boxed{\Delta p = 0}$ - pęd jest dokładnie wyznaczony,

co jest zgodne z zasadą nieozn. Heis

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zad 4/10

Nieskończona studnia potencjału:



$$V(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\in[0,a] \\ \infty & \text{dla } x\notin[0,a] \end{cases}$$

Rozwiązaniem równ. Schrödingera dla $x\in[0,a]$ jest ~~fala p~~ funkcję falową postaci takiej samej, jak dla cząstki swobodnej, ale ta fala musi znikać na brzegach studni i

$\psi(x)\equiv 0$ dla $x\notin[0,a]$ (obszar niedostępny dla cząstki)

tj. ogólne rozwiązanie równ. Schrödingera ~~dla~~ niezależn. od czasu dla cząstki w ∞ studni potencjału ma postać:

$$\boxed{\psi(x) = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{fala biegnąca w prawo}} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\text{fala biegnąca w lewo}}}, \qquad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

1) $\psi(0)=\psi(a)=0$ - na brzegach obszaru

stąd

$A+B=0$

$A=-B$

czyli $\psi(x)=A(e^{ikx}-e^{-ikx}) = C\sin(kx)$ - fala stojąca z węzłami umieszczonymi na brzegach studni.

2) z warunku: $\psi(x=0)=0$ mamy $\sin(ka)=0$

$ka=n\pi \Rightarrow \boxed{k=\frac{n\pi}{a}}$ dla $n=1,2,\ldots$

tzn. wektor falowy dla cząstki w studni potencjalnej jest skwantowany

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

3) ponieważ jednak

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{n\pi}{a}$$

stąd dostajemy:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad ; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\boxed{E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}}$$

=> cząstka w studni nie może mieć dowolnej energii ale jest ona skwantowana!

4) Rys. f. falowych i odpowiadających im wart. energii