

Fizyka Ogólna

Zestaw nr 10.

Funkcja falowa, równanie Schrödingera niezależne od czasu.

1. Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki w chwili $t=0$ ma postać:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{dla } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \end{cases},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Wyznacz stałą A . Jakie jest średnie położenie i pęd cząstki w chwili $t=0$?

Odpowiedź: $A = \sqrt{15/16a^5}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$.

2. Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki ma postać: $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|-it\omega}$, gdzie $\lambda, \omega \in \mathbb{R}_+$. Wyznacz stałą A . Jakie jest średnie położenie i średni kwadrat położenia cząstki?

Odpowiedź: $A = \sqrt{\lambda}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = 1/2\lambda^2$.

3. Wyznacz funkcję falową opisującą jednowymiarową cząstkę swobodną o masie m , która ma energię kinetyczną E . Załóż, że cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi ox . Skorzystaj z niezależnego od czasu równania Schrödingera ze stałym potencjałem. Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa tego, że położenie cząstki jest z przedziału $(x, x+dx)$? Wyznacz $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle$ charakteryzujące tę cząstkę.

Odpowiedź: $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t) = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}$, gdzie $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, zaś $\omega = E/\hbar$.

Gęstość prawd.: $P(x,t)dx = A^2 dx$, gdzie $A \approx 0$, ponieważ $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)dx = 1$.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi x \Psi^* dx = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi x^2 \Psi^* dx = \infty, \quad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi^* dx = \sqrt{2mE}.$$

4. Wyznacz stany stacjonarne i dozwolone wartości energii dla cząstki o masie m umieszczonej w nieskończonej studni potencjału o szerokości a . Innymi słowy: rozwiąż niezależne od czasu równanie Schrödingera dla cząstki w potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, a] \\ \infty & \text{dla } x \notin [0, a] \end{cases}$$

Odpowiedź: $\psi_n(x) = C \sin[k_n x]$, gdzie $k_n = \frac{n\pi}{a}$ dla $n=1, 2, 3, \dots$. Dozwolone poziomy

energii: $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}$.