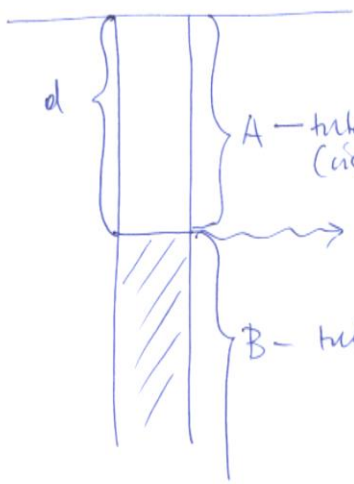
zad 10 | zest. 3.

Kamień o masie m wrzucono z prędkością v_0 do studni, w której poziom wody jest na głębokości d. Zakładamy, że kamień w powietrzu spada swobodnie, natomiast w wodzie działa na niego siła oporu proporcjonalna do prędkości $F(v) = -kv$, $k = const, > 0$. Znaleźć zależności położenie, prędk. i przysp. kamienia od czasu:

zakładamy dla uproszczenia, że $v_0 = 0$ (przeważnie spadek swobodny)



A — tutaj działa tylko siła grawitacyjna (ciężka) $F_w = m \cdot g$

ruch kamienia zmienia się gdy wpada do wody

B — tutaj działają dwie siły $F_w = mg - kv$

1) Określamy czas τ, gdy kamień wpada do wody: z zależności

$$\frac{g\tau^2}{2} = d \qquad \boxed{\tau = \sqrt{\frac{2d}{g}}}$$

gdy $v_0 \neq 0$ wtedy mamy równ. kwadratowe:

$$\frac{g\tau^2}{2} + v_0\tau - d = 0$$

$$\Delta = v_0^2 + 2gd$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{v_0^2 + 2gd}$$

$$\tau_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gd}}{g}$$

rozw. fizyczne $\tau > 0$

$$\tau = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gd} - v_0}{g}$$

2) Gdy $t < T$ wtedy mamy spadek swobodny:

$a(t) = g$

$v(t) = gt$

$x(t) = \frac{gt^2}{2}$

gdy $v_0 \neq 0$

$a(t) = g$

$v(t) = gt + v_0$

$x(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t$

$x(t)$ - to głębokość na jakiej jest aktualnie kamień.

3) Gdy $t > T$ wtedy musimy rozwiązać ~~kilka~~ odpowiednie równanie ruchu (przecałkować kilko rów. różn.).

a) z def. przysp. chwilowego:

$$\boxed{a = \frac{F_w}{m} = \frac{dv}{dt}}$$

$$a = g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{-\frac{k}{m}v + g} = dt$$

$$\frac{dv}{-\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)} = dt$$

$$\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} = \left(-\frac{k}{m}\right)dt \quad \Big| \int$$

3

uwaga
$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + \text{const}$$
$$\int \frac{dx}{x-e} = \ln(x-e) + \text{const}$$

$$\int \frac{dv}{\left(v - \frac{mg}{k}\right)} = \left(-\frac{k}{m}\right)\int dt$$

$$\ln\left(v - \frac{mg}{k}\right) = \left(-\frac{k}{m}\right)t + C_1 \quad \Big| e^{\wedge}$$

$$v - \frac{mg}{k} = e^{-\frac{k}{m}t} \underbrace{e^{C_1}}_{=C}$$

$$\boxed{v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}}$$

stałą C wyznaczamy z warunku początk. ~~dla etapu skoku~~, gdy kamień wpadł do wody:

tj. dla ~~t~~ $\tau = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ mamy $v(\tau) = g\tau + v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gd}$

gdy $v_0 = 0$ wtedy: $v(\tau) = \sqrt{2gd}$

$$v(\tau) = \sqrt{2gd} = Ce^{-\frac{k}{m}\sqrt{\frac{2d}{g}}} + \frac{mg}{k}$$

$$Ce^{-\frac{k}{m}\sqrt{\frac{2d}{g}}} = \sqrt{2gd} - \frac{mg}{k}$$

$$C = e^{\frac{k}{m}\sqrt{\frac{2d}{g}}}\left(\sqrt{2gd} - \frac{mg}{k}\right)$$

ostatecznie dostajemy zależność prędk. od czasu:

$$\boxed{v(t) = e^{\frac{k}{m}\left(\sqrt{\frac{2d}{g}} - t\right)}\left(\sqrt{2gd} - \frac{mg}{k}\right) + \frac{mg}{k}.}$$

Skąd też mamy $\boxed{a(t) = g - \frac{k}{m}v(t)}$ patrz. str. 2.

b) x(t) wyznaczony z def. prędk. chwilowej

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$dx = v(t)dt$; podstawiamy $v(t) = \dots$ – które znaleźliśmy i stąd całkowanie wyzn. z warunku $x(t) = d$.

Zauważyłem że ~~nie~~ w odp. pod zadaniem w zestawie 3 są pomyłki, zaokrąglenia ~~ozn~~.