

Wstęp do Fizyki

Ćwiczenia nr 4. Ruch krzywoliniowy

1. Koło o promieniu R obraca się w taki sposób, że kąt obrotu promienia zależy od czasu w następujący sposób: $\varphi(x) = A + Bt + Ct^2$. Dla punktów położonych w odległości $r = \frac{3}{4}R$ od środka koła znaleźć po czasie τ od momentu rozpoczęcia ruchu:
- wektor prędkości kątowej,
 - wektor prędkości liniowej,
 - składowe przyspieszenia: styczną i normalną do toru oraz
 - wektor przyspieszenia.

Odpowiedź: a) $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct$, oraz $\vec{\omega} \parallel \vec{l}_z$ gdzie $\vec{l}_z$ to wersor w kierunku osi oz .

b) $v(t) = \omega r = (B + 2C)\frac{3}{4}R$, $\vec{v}$ jest styczny do toru.

c) $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{3}{2}RC$, $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{3}{4}R(2Ct + B)^2$,

d) $a(t) = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \dots$, oraz $\vec{a} = a_t \vec{l}_t + a_n \vec{l}_n$, gdzie $\vec{l}_t, \vec{l}_n$ wersory styczny i norm. do toru.

2. Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne do toru w rzucie poziomym z prędkością początkową v_0 . Ile wynosi promień krzywizny toru?

Odpowiedź: $v(t) = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$, $a_t = \frac{g^2 t}{v}$, $a_n = g \sqrt{1 - \frac{t}{v}}$, $\rho = \frac{v^2}{a_n}$.

3. Ćma porusza się po krzywej, której długość jest dana wzorem: $s(t) = s_0 e^{ct}$, gdzie s_0, c stałe. Wiedząc, że w każdym punkcie toru wektor przyspieszenia $\vec{a}$ tworzy stały kąt φ ze styczną do toru znajdź wartości:
- prędkości,
 - składowych przyspieszenia: stycznej i normalnej do toru,
 - promień krzywizny toru.

Odpowiedź: a) $v(t) = \frac{ds}{dt} = s_0 c e^{ct}$,

b) $a_t = s_0 c^2 e^{ct}$, $a_n = a_t \tan \varphi$,

c) $\rho = \frac{v^2}{a_n} = s_0 e^{ct} \cot \varphi$.

4. Ćma, lecąc stara się utrzymać stały kąt $\alpha < \frac{\pi}{2}$ między źródłem światła i kierunkiem prędkości $\vec{v}$. Znaleźć we współrzędnych biegunowych równanie toru ruchu, przy założeniu: $\varphi(0) = 0$ oraz $r(0) = r_0$. Przyjąć, że źródło światła jest umieszczone w początku układu współrzędnych.

Wskazówka: $\vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi = \frac{d\rho}{dt} \vec{l}_\rho + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, gdzie: $v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$ składowa radialna prędkości,

$v_\varphi = \omega \rho = \rho \frac{d\varphi}{dt}$ składowa transwersalna.

Odpowiedź: $r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi \cot \alpha}$

5. Kółka tarcza o promieniu R wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω . Ze środka tarczy wyrusza biedronka i porusza się wzdłuż promienia ze stałą prędkością v_0 . Znaleźć:
- równanie ruchu i toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych,
 - zależność od czasu wartości wektora prędkości $v(t)$ oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej,
 - zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia $a(t)$ oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej,
 - zależność od czasu składowych normalnej i stycznej do toru przyspieszenia,
 - całkowitą drogę przebytą przez biedronkę względem tarczy,
 - całkowitą długość drogi przebytej przez biedronkę w czasie t względem nieruchomego układu odniesienia.

Odpowiedź:

- równanie ruchu we współrzędnych biegunowych: $r(t) = v_0 t$, $\varphi(t) = \omega t$;
równanie ruchu we współrz. kartezj.: $x(t) = v_0 t \cos(\omega t)$, $y(t) = v_0 t \sin(\omega t)$;
równanie toru we współrz. biegunowych: $r(\varphi) = \frac{v_0}{\omega} \varphi$;
równanie toru we współrz. kartezj.: spirala Archimedesesa: $\frac{x}{y} = \tan \varphi = \tan \left(\frac{\omega}{v_0} \sqrt{x^2 + y^2} \right)$.

- składowa radialna prędkości: $v_r = \frac{dr}{dt} = v_0$,
składowa transwersalna: $v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = \omega r$,
wartość prędkości: $v(t) = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = v_0 \sqrt{1 + (\omega t)^2}$.

- składowa radialna przyspieszenia: $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -v_0 \omega^2 t$,
składowa transwersalna: $a_\varphi = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 2\omega v_0$,
wartość przyspieszenia: $a(t) = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = v_0 \omega \sqrt{4 + \omega^2 t^2}$.

- składowa styczna przyspieszenia: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 \omega^2 t}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}}$,
składowa normalna: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{v_0 \omega (2 + \omega^2 t^2)}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}}$,
promień krzywizny toru: $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \dots$

- droga biedronki względem tarczy: $l = \int_0^t v_r dt = v_0 t$,
droga względem nieruchomego obserwatora stojącego poza tarczą: $s = \int_0^t v(t) dt = \dots$

6. Znajdź równanie $\varphi(t)$ (gdzie φ jest kątem między promieniem wodzącym i osią ox) punktu poruszającego się po okręgu ruchem opóźnionym, jeżeli kąt między wektorem przyspieszenia i promieniem wodzącym ma stałą wartość α . Przyjmij, że warunki początkowe są następujące: $\varphi(0) = 0$ oraz $\omega(0) = \omega_0$.

Szkic rozwiązania: $\frac{a_t}{a_n} = \tan \alpha$; $a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$; $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$; stąd dostajemy równanie różniczkowe na ω ; $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$;

Odpowiedź: $\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 \tan \alpha t}$; $\varphi(t) = -\frac{1}{\tan \alpha} \ln(1 - \omega_0 \tan \alpha t)$.