

Wstęp do Fizyki

Ćwiczenia nr 3. Rozwiązywanie równań ruchu (kinematycznych i dynamicznych)

1. Cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi ox . Jej prędkość v zależy od położenia i jest określona wzorem: $v(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$. Wyznaczyć:

- a) zależność prędkości i przyspieszenia cząstki od czasu: $v(t)$, $a(t)$,
- b) średnią prędkość cząstki w czasie, w którym przebędzie ona drogę s .

Przyjąć, że $x(0) = x_0$.

Odpowiedź: $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$, $v(t) = \frac{dx}{dt} = x_0 \alpha e^{\alpha t}$, $a(t) = \frac{dv}{dt} = x_0 \alpha^2 e^{\alpha t}$,

$$s = x_0 - x(\tau), \tau - \text{czas, po którym cząstka osiąga położenie } s + x_0$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{s+x_0}{x_0} \right), \text{ stąd } v_{sr} = \frac{s}{\tau}.$$

2. Punkt materialny porusza się po prostej z przyspieszeniem $a = -\alpha v$, $\alpha > 0$. Dla $t = 0$ jego prędkość wynosi v_0 . Jaką drogę przebędzie do zatrzymania się. W jakim czasie przebędzie połowę tej drogi?

Odpowiedź: $v(t) = v_0 e^{-\alpha t}$, ciało zatrzyma się dla $t \rightarrow \infty$, $x(t) = \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$,
do chwili zatrzymania się przebędzie drogę $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{v_0}{\alpha}$,

3. Znajdź prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami:

$$x(t) = A \cos(Bt^2), \quad y(t) = A \sin(Bt^2).$$

Jaką krzywą jest opisany tor w tym problemie?

Odpowiedź: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$, $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$, podobnie wyznaczamy $\vec{a}$, tor jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = A^2$.

4. Na ciało o masie m działa siła hamująca ruch proporcjonalna do prędkości: $F = -bv$ (ruch jednowymiarowy), gdzie b stała większa od zera.

- a) Znaleźć zależność prędkości od czasu, $v(t)$.
- b) Jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się? Przyjąć, że początkowa prędkość ciała była równa v_0 , zaś początkowe położenie $x_0 = 0$.

Odpowiedź: $v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$, $x(t) = \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{v_0 m}{b}$.

5. Samochód o masie m hamowany jest siłą oporu $F = -kv^2$, gdzie k stała większa od zera. Jaką drogę przebędzie samochód zanim jego prędkość zmaleje do połowy. Przyjąć, że początkowa prędkość samochodu była równa v_0 , zaś początkowe położenie $x_0 = 0$.

Odpowiedź: $v(t) = \left(\frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0} \right)^{-1}$, $v(\tau) = \frac{v_0}{2}$, $\tau = \frac{m}{k} \frac{1}{v_0}$, $x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{m} t \right)$, $x(\tau) = \frac{m}{k} \ln 2$.

6. Na ciało o masie m działa siła $F(t) = f_0 e^{-at}$ (gdzie f_0, a stałe większe od zera). W chwili początkowej ciało miało prędkość $v(0) = 0$ i znajdowało się w punkcie $x(0) = 0$. Wyznacz położenie i prędkość ciała w funkcji czasu. Jaka będzie prędkość graniczna ciała (tzn. $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = ?$).

Odpowiedź: $v(t) = \frac{f_0}{ma} (1 - e^{-at})$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{f_0}{ma}$, $x(t) = \frac{f_0}{ma} t + \frac{f_0}{ma^2} (e^{-at} - 1)$

7. Na ciało o masie m działa siła $F(t) = f_0 \cos(\omega t)$, przy czym $f_0, \omega = \text{const.}$ W chwili początkowej ciało miało prędkość $v(0) = 0$ i znajdowało się w położeniu $x(0) = x_0$. Wyznacz położenie, prędkość i przyspieszenie ciała w funkcji czasu. Pokaż, że $x_0 = -\frac{f_0}{m\omega^2}$.

Odpowiedź: ciało to oscylator harmoniczny, $a(t) = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t)$, $v(t) = \frac{f_0}{m\omega} \sin(\omega t)$, $x(t) = \frac{f_0}{m\omega^2} \cos(\omega t)$.

8. W chwili $t = 0$ na będącą w spoczynku cząstkę o masie m zaczęła działać siła $F(t) = bt(\tau - t)$, gdzie b, τ stałe. Jaką prędkość uzyskała cząstka po czasie τ i jaką drogę przebyła do tego czasu.

Odpowiedź: $v(t) = \frac{b}{m} \left(\frac{\tau}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right)$, $v(\tau) = \frac{b\tau^3}{6m}$, $x(t) = \dots$, $x(\tau) = \frac{b\tau^4}{12m}$.

9. Na poruszające się ciało o masie m działa siła oporu $F(v) = -b\sqrt{v}$, gdzie v prędkość ciała, zaś b stała dodatnia. Zakładając, że w chwili $t = 0$ prędkość ciała wynosiła v_0 , wyznacz czas τ , po jakim ciało zatrzyma się i drogę $x(\tau)$ jaką przebędzie do chwili zatrzymania się.

Odpowiedź: $\tau = \frac{2m\sqrt{v_0}}{b}$, $x(\tau) = \frac{2mv_0^{3/2}}{3b}$.

10. Kamień o masie m wrzucono z prędkością v_0 do studni, w której poziom wody znajduje się na głębokości d . Zakładamy, że kamień w powietrzu spada swobodnie, natomiast w wodzie działa na niego siła oporu proporcjonalna do prędkości $F(v) = -kv$, gdzie k stała dodatnia. Znaleźć zależność położenia, prędkości i przyspieszenia kamienia od czasu.

Odpowiedź: $a(t) = \left(g - \frac{kv_1}{m} \right) e^{-\frac{kt}{m}}$, gdzie $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gd}$; $v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_1 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}}$,
 $x(t) = \frac{mg}{k} t + \frac{m}{k} \left(v_1 - \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-kt/m}) + d$.

11. Pocisk przebił na wylot deskę o grubości h zmniejszając przy tym swoją prędkość z v_0 do v_1 . Oblicz czas przelotu pocisku przez deskę, jeżeli siła oporu z jaką deska działał na pocisk była proporcjonalna do kwadratu prędkości.

Odpowiedź: $F_{\text{oporu}} = -bv^2$, stąd $v(t) = v_0 \left(1 + \frac{v_0 b}{m} t \right)^{-1}$, gdzie $v(0) = v_0$. Położenie pocisku wewnątrz deski: $x(t) = \frac{m}{b} \ln \left(1 + \frac{v_0 b}{m} t \right)$, skąd można wyznaczyć τ takie, że $x(\tau) = h$. Dostajemy:
 $\tau = \frac{m}{v_0 b} (e^{hb/m} - 1)$.

Wciąż nie znamy jednak stałej proporcjonalności b , którą można wyznaczyć z warunku: $v(\tau) = v_1$, uzyskując: $b = \frac{m}{h} \ln \left(\frac{v_0}{v_1} \right)$. Stąd, w końcu dostajemy: $\tau = \frac{h}{v_0} \left(\frac{v_0}{v_1} - 1 \right) / \ln \left(\frac{v_0}{v_1} \right)$.

12. Spadochroniarz wyskakuje z lecącego idealnie poziomo na dużej wysokości samolotu. Jak będzie zależała od czasu prędkość opadania spadochroniarza, jeśli działające na niego siły oporu powietrza są proporcjonalne do prędkości opadania (współczynnik proporcjonalności wynosi $b > 0$) i przeciwnie do niej skierowane.

Odpowiedź: $v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$

13. Kulkę drewnianą o gęstości ρ_1 i masie m wrzucamy z wysokości h do cieczy o gęstości ρ_2 , przy czym $\rho_1 < \rho_2$. Siła oporu, z jaką ciecz działa na kulkę, jest równa $F = -kv$. Wyznaczyć położenie kulki $x(t) = ?$

14. Ciało o masie m rzucono pionowo w górę z prędkością początkową v_0 . Zakładając, że siła oporu jest proporcjonalna do powietrza, $F = -bv$, gdzie $b > 0$ znany współczynnik proporcjonalności, oblicz czas wznoszenia się ciała do najwyższego położenia.

Odpowiedź: $\tau = \frac{m}{b} \ln \left(1 + \frac{v_0 b}{mg} \right)$

15. (*) Na gładkim stole leży sznur. $\frac{1}{4}$ jego długości zwisa pionowo w dół. Znaleźć czas, po którym cały sznur spadnie ze stołu, jeżeli w chwili $t=0$ jego prędkość była równa zero. Całkowita długość sznura wynosi l . Opory ruchu pominąć.

Odpowiedź: $t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$.