

Drgania nieliniowe

Dotychczas rozpatrzyliśmy ruch drgający w układach, w których działa siła sprężysta $F_s = -kx$.

Działanie tej siły na cząstkę masywną prowadzi do *ruchu harmonicznego*:

- o położenie opisane jest funkcją harmoniczną
- o energia całkowita jest stała
- o energia potencjalna ulega przemianie energię kinetyczną i odwrotnie.

Tarcie przyjęliśmy w postaci siły tarcia lepkiego $F_o = -\gamma \dot{x}$.

To jest najprostszy rodzaj drgań, który najłatwiej poddaje się opisowi. Ze względu na liniowy charakter równań ruchu harmonicznego nazywamy ten rodzaj drgań liniowymi (obowiązuje zasada superpozycji).

Istnieje wiele rodzajów drgań nieliniowych. Dobrym przykładem – również bardzo rozpowszechnionym w przyrodzie i w technice są *drgania relaksacyjne*: {Patrz: RelaksacyjneDrganie.WMV na stronie przedmiotu}

- zachodzą wyłącznie w układach niezachowawczych
- można wyróżnić 2 fazy ruchu:
 - o gromadzenia energii potencjalnej
 - o rozpraszania energii do otoczenia

Najprostsze uogólnienie równania ruchu dla oscylatora harmonicznego da się zapisać:

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = A \sin(\omega t)$$

gdzie $V(x)$ jest energią potencjalną oscylatora. Oczywiście oscylator harmoniczny porusza się w potencjale $V(x) = \frac{k x^2}{2}$.

Gdy wychylenia układu są duże zaczynają odgrywać coraz to dalsze wyrazy rozwinięcia potencjału $V(x)$ na szereg. Potencjał zawierający co najwyżej 4-tą potęgę nazywa się potencjałem anharmonicz-nym.

“Miękka” sprężyna

Potencjał $V(x) = a x^2 + b x^4$ dla $b < 0$ to przypadek sprężyny nieliniowej, której sprężystość maleje dla większych drgań x .

“Twarda” sprężyna

Odwrotny przypadek zachodzi gdy $b > 0$. Wtedy sprężystość sprężyny rośnie w miarę wzrostu wychylenia x .

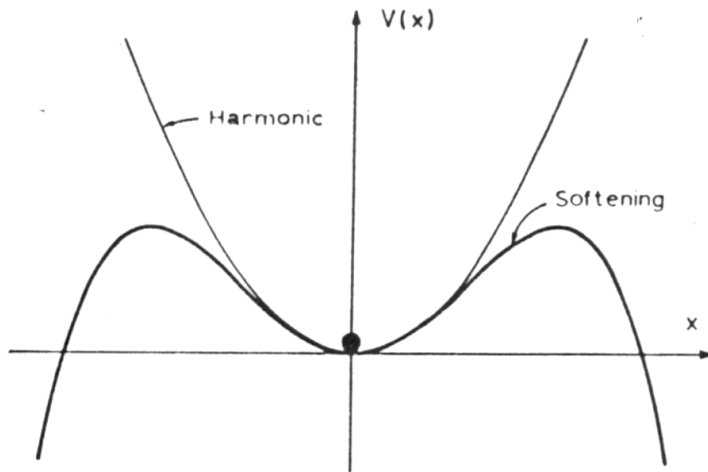


Figure 6.8 An anharmonic potential with softening spring effect

Obecność nieliniowości w równaniu ruchu prowadzi do szeregu ciekawych efektów:

◆ Nieliniowy rezonans

Krzywa rezonansowa ulega zniekształceniu. Wygina się ona w lewo, gdy potencjału typu miękka sprężyna oraz w prawo dla potencjału sprężyny twardej

Jednocześnie pojawiają się nowe zjawiska:

- multistabilność -

w pewnych zakresach parametrów kontrolnych układu (na rys. obok jest to częstość) otrzymać można 2 (czasami więcej) rozwiązań.

Rozwiązania te są otrzymywane w zależności od warunków początkowych

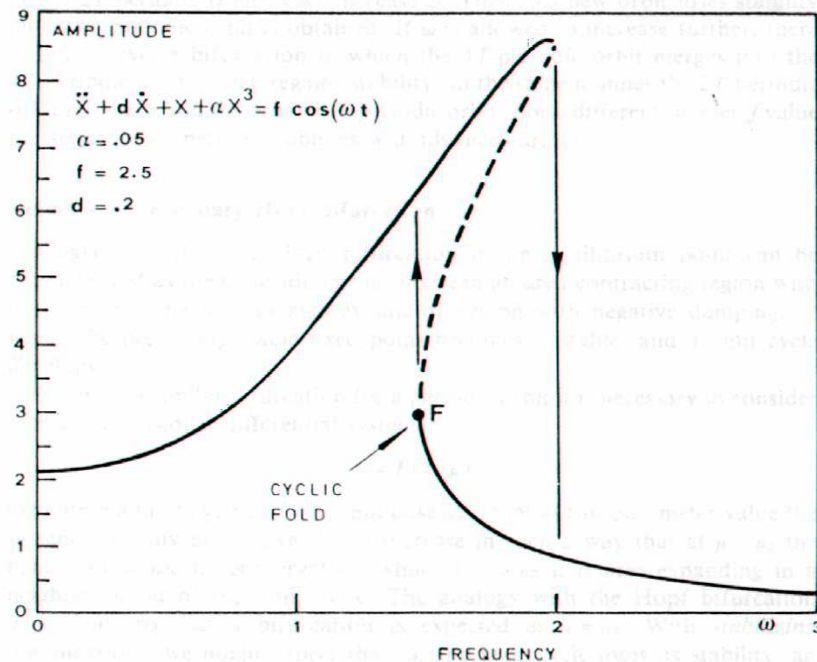


Figure 7.9 Resonance response curve for Duffing's equation

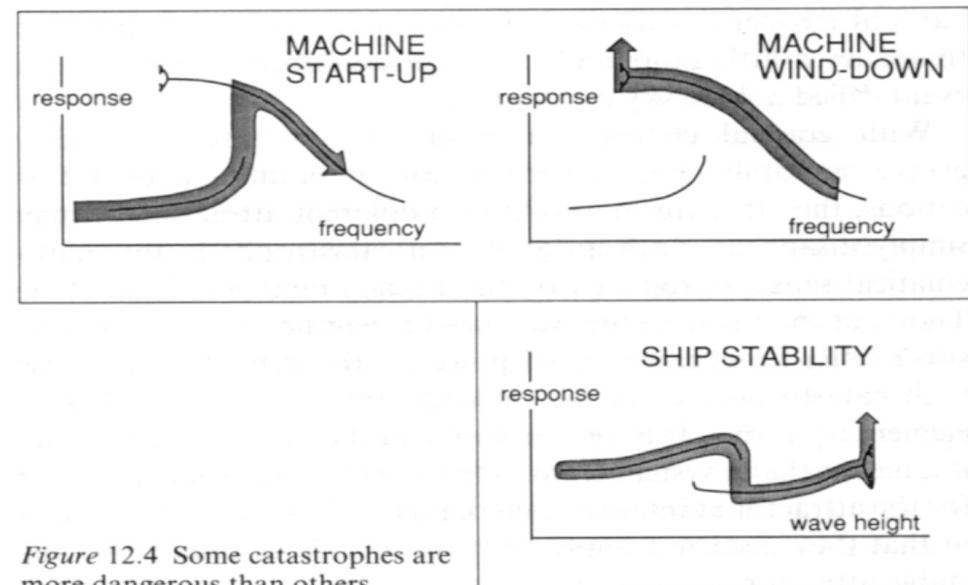


Figure 12.4 Some catastrophes are more dangerous than others.

Już nieliniowość czwartego stopnia w potencjale (tj. 3-go stopnia w sile) może prowadzić do bardzo złożonych trajektorii w tym również chaotycznych.

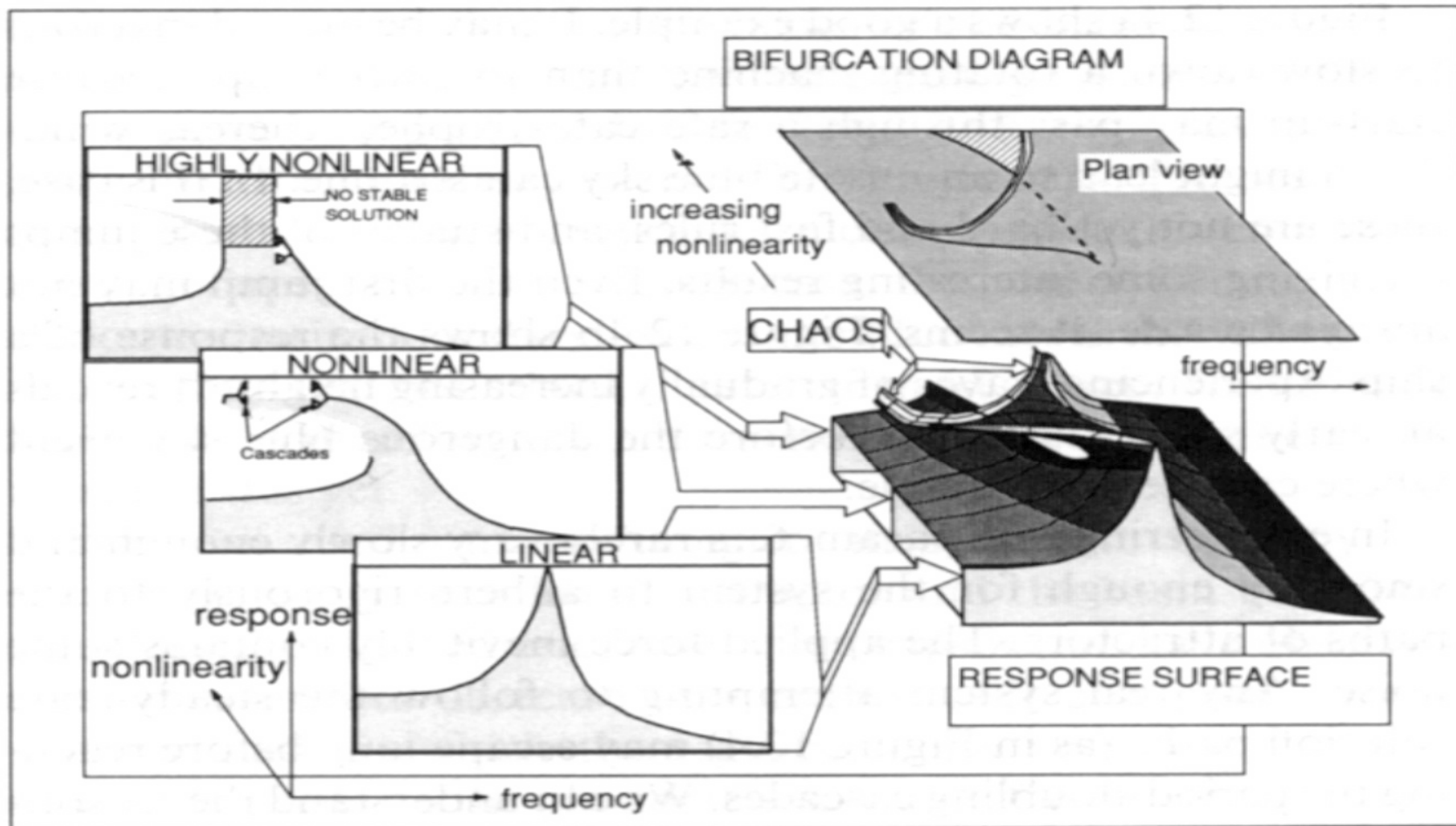


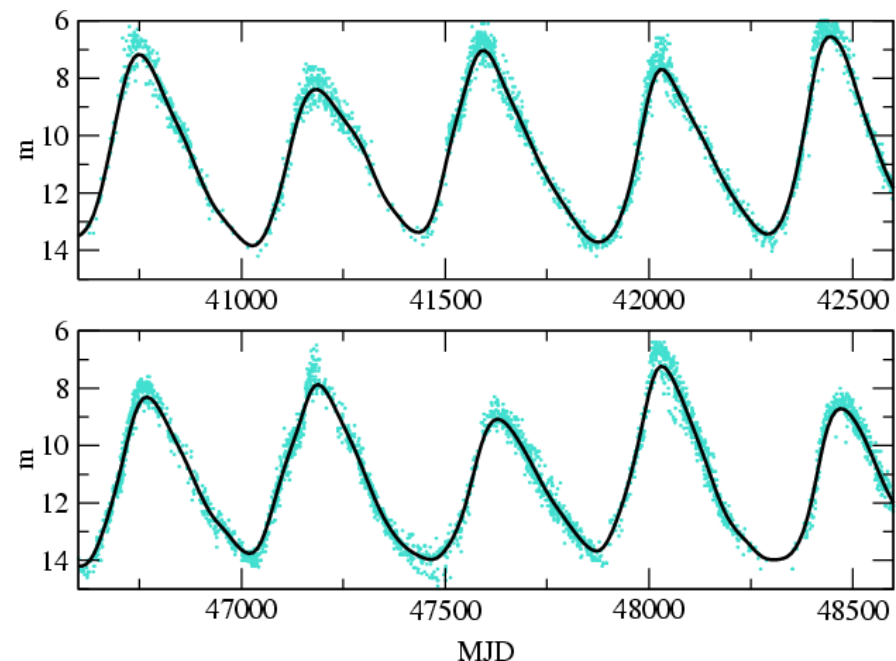
Figure 12.3 The steady response of a system to a periodic force shows a thin chaotic rim as the system becomes more nonlinear.

- ruch chaotyczny

Powyżej widzieliśmy, że w miarę zmiany parametru kontrolnego np. zmiany amplitudy siły zewnętrznej lub jej częstości proste drgania harmoniczne tracą stabilność i są zastępowane innymi rozwiązaniami o bardziej złożonym charakterze.

Typowym objawem takiego zachowania jest np. podwajanie okresu gdy układ - dotychczas poruszający się z częstością ω porusza się z częstością $\omega/2$.

Zazwyczaj przejście takie polega na tym, że co druga amplituda drgania ma inną wysokość jak obok gdzie podano przykład pomiaru natężenia światła gwiazdy zmiennej R Cygni w funkcji czasu (krzywe dodane dla wygody oka, punkty doświadczalne na zielono):



Gdy zmieniamy parametr kontrolny układu (np. amplitudę siły wymuszającej) i następuje raptowna zmiana zachowania układu mówimy, że wystąpiła **bifurkacja**.

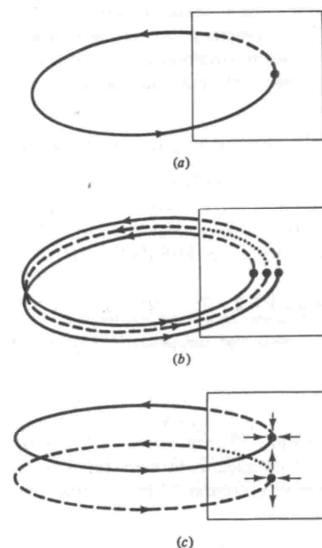
Teoria równań różniczkowych (równania ruchu układów dynamicznych są równaniami różniczkowymi) rozróżnia wiele rodzajów bifurkacji:

- bifurkacja podwajania okresu (częstość oscylacji układu zmniejsza się 2-krotnie)
- bifurkacja Hopfa – w ruchu układu pojawia się nowa, niewspółmierna z poprzednimi częstość
- bifurkacja siodło-węzeł – prowadzi do powstania nowego rozwiązania równania ruchu; poniżej punktu bifurkacji siodło-węzeł albo rozwiązanie takie nie istniało albo było zupełnie inne np. ruch chaotyczny

Przykład:

Bifurkacja podwajania okresu prostego drgania harmonicznego

Bifurkacja siodło-węzeł



Rys. 2.18. Bifurkacja podwojenia okresu (a, b); bifurkacja siodło-węzeł (c). Na tym rysunku strzałki na powierzchni przekroju wskazują kierunki przyciągania i odpychania od siodła i od węzłów w punktach stałych powierzchni przekroju odwzorowania

Bywają takie układy fizyczne, w których następuje ciąg bifurkacji: kolejne rozwiązania tracą stabilność na rzecz następnych.

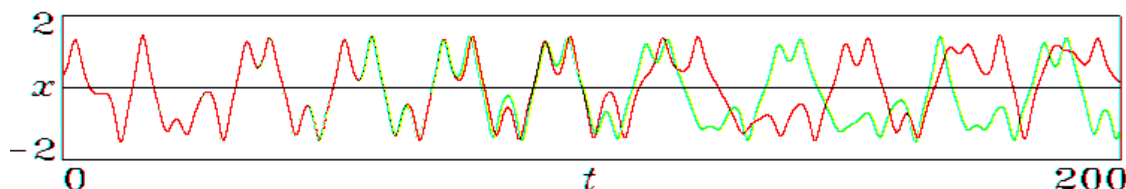
Przykładem jest tzw. droga do chaosu przez podwajanie okresu, w której odstęp między kolejnymi podwojeniami okresu w funkcji parametru kontrolnego maleją w postępie geometrycznym. Gdy parametr kontrolny układu osiągnie tzw. punkt akumulacji okres trajektorii staje się nieskończony. Oznacza to trajektorię, która się nie powtarza. Mówimy wtedy, że układ osiągnął **stan chaosu deterministycznego**.

Stan chaotyczny jest to dopełnienie zbioru wszystkich niestabilnych trajektorii okresowych układu w takim obszarze przestrzeni parametrów kontrolnych, gdzie żaden stan okresowy nie jest stabilny.

Wprowadza się różróżnienie pomiędzy stanami chaotycznymi a zachowaniem przypadkowym (losowym)

Czułość na warunki początkowe

Chaotyczność trajektorii układów deterministycznych wynika z czułości na warunki początkowe układu w stanie niestabilnym a **nie** z działania czynników przypadkowych



Oprócz drogi do chaosu poprzez podwajanie okresu
Dróg do chaosu jest więcej.

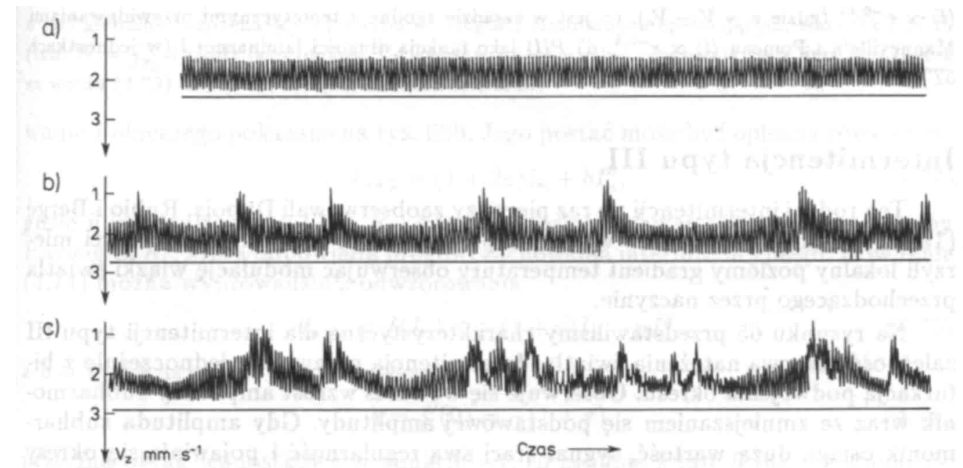
Przykład

Droga do chaosu poprzez intermitencję

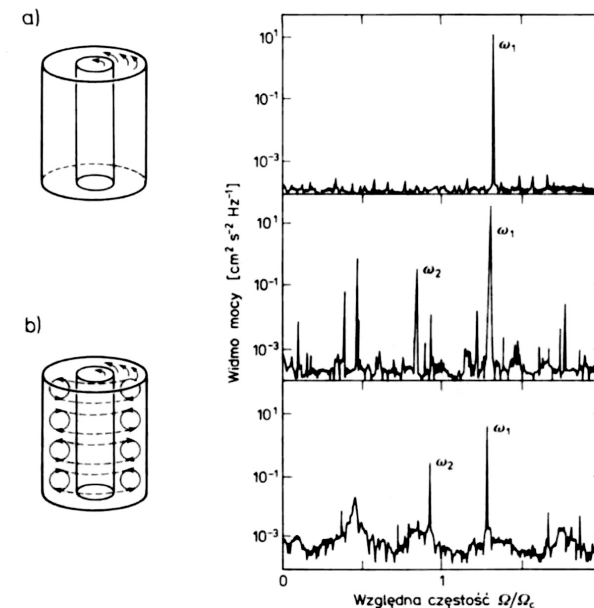
Przykład

Droga do chaosu poprzez kwazi-okresowość

W widmie mocy pojawiają się nowe **niewspółmierne**
częstości



Rys. 63. Intermitencja w doświadczeniu Bénarda: prędkość pionowa mierzona w środku komórki Bénarda zmienia się ze wzrostem liczby Rayleigha od a) ruchu okresowego przez b) intermitencję do c) ruchu chaotycznego



Rys. 101. Niestabilność Taylora i widmo mocy prędkości (wg Swinney i Gollub, 1978)

Uniwersalność zjawisk chaotycznych

Znaczenie zarówno poznawcze jak i praktyczne ma to, że cechy ruchu chaotycznego są w dużym stopniu uniwersalne.

Rozumiemy tu fakt, że fizycznie bardzo różne układy wykazują bardzo podobne zachowania dynamiczne.

Przykład

Drogę do chaosu poprzez kwazi-okresowość znaleziono w

- układzie wahadła nieliniowego (wahadło matematyczne o dużych kątach wychylenia),
- w przepływach ciepła i przepływach cieczy
- w przewodnictwie niektórych substancji (nioban barwosodowy - rodzaj ceramiki przewodzącej).

Uniwersalność ta wynika z własności równań różniczkowych, które są równaniami ruchu układu.

Cechą wspólną układów dynamicznych w ruchu chaotycznym jest **samopodobieństwo zachowania** (ewolucji w czasie) w różnych okresach czasu

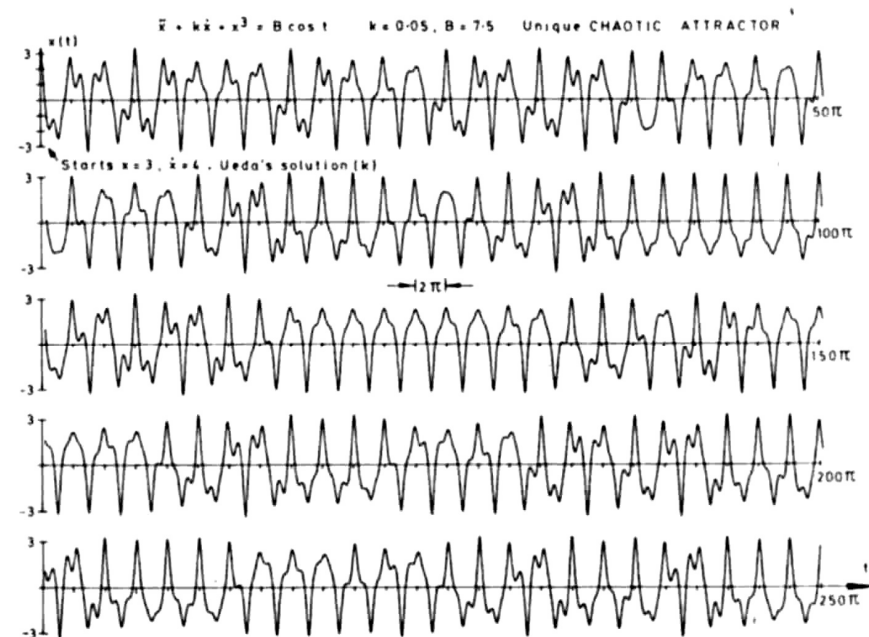


Figure 1.1 Time series of a steady-state chaotic response