

Unimodalne odwzorowania kwadratowe

Najbardziej znane są dwa odwzorowania:

- kwadratowe $x_{n+1} = 1 - a x_n^2$

lub równoważnie

$$x_{n+1} = C - x_n^2$$

- logistyczne

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n) \equiv \cap(x_n)$$

Oba odwzorowania są ze sobą blisko spokrewnione i należą do szerokiej klasy topologicznie równoważnych

jednowymiarowych odwzorowań unimodalnych, które

- są określone na skończonym odcinku
- posiadają pojedyncze, gładkie maksimum.

Odwzorowania te są **nieodwracalne**: nie można napisać jednoznacznie:

$$x_n = \cap^{-1}(x_{n+1})$$

gdzie $\cap(x)$ - dane odwzorowanie unimodalne np. logistyczne.

Pochodzenie odwzorowania logistycznego:

Odwzorowanie logistyczne pojawia się bezpośrednio w demografii.

W modelu zmian populacji gdy pokolenia nie zachodzą na siebie (jak to się dzieje np. u owadów):

- najprostsze prawo zakłada stałą szybkość reprodukcji z pokolenia na pokolenie:

$$X_{n+1} = r X_n$$

Bardziej wyrafinowanie:

założyć, że zdolność reprodukcji maleje gdy populacja rośnie: opisuje to odwzorowanie logistyczne

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n)$$

Podstawowe własności odwzorowania logistycznego

I. Dla $0 < r \leq 1$ wszystkie warunki początkowe prowadzą do 0.

II. Dla $r > 1$ wszystkie $x_0 < 0$ dążą do $-\infty$
podobnie wszystkie $x_0 > 1$ dążą do $-\infty$

III. Dla $r = 4$ istnieje przekształcenie współrzędnych

$$x = \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2} \right)$$

które wiąże kolejne iteracje odwzorowania logistycznego $\cap(x)$ z iteracjami odwzorowania trójkątnego $\Delta(y)$ dla $a = 1.0$.

Konsekwencje własności III:

- ▶ Skoro odwzorowanie trójkątne dla parametru $a=1.0$ jest chaotyczne \Rightarrow tak samo będzie się zachowywać odwzorowanie logistyczne dla $r=4.0$
- ▶ Odwzorowanie logistyczne dla $r=4$ będzie miało tyle samo (niestabilnych) punktów stałych co odwzorowanie trójkątne tzn. w granicy $n \rightarrow \infty$ nieskończenie wiele
- ▶ Orbity periodyczne są gęste w $[0,1]$ dla odwzorowania trójkątnego dla $a=1.0$, więc są też gęste dla odwzorowania logistycznego z $r=4$
- ▶ Naturalna miara niezmiennicza dla odwzorowania trójkątnego $\rho(y) = 1$
- ▶ Skoro istnieje przekształcenie współrzędnych $x = x(y)$ to częstość odwiedzania odcinka $x, x+dx$ dla odwzorowania logistycznego musi być taka sama jak częstość odwiedzania odcinka $y, y+dy$ dla odwzorowania trójkątnego tj.

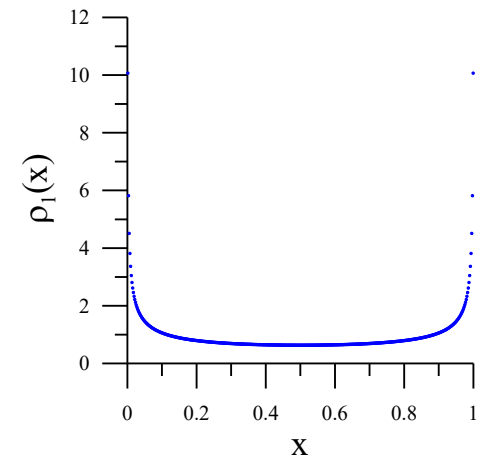
$$\rho_1(x) |dx| = \rho(y) |dy|$$

inaczej

$$\rho_1(x) = \left| \frac{dy(x)}{dx} \right| \rho(y(x))$$

Jeśli wstawić postać $y(x)$ to

$$\rho_1(x) = \pi^{-1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$



Naturalna miara niezmiennicza odwzorowania logistycznego dla $r=4$ ma osobliwości w $x=0$ i $x=1$.

IV. Dla $1 \leq r \leq 3$ odwzorowanie logistyczne ma dwa punkty stałe:

$$\begin{aligned} x^* = 0 & \quad - \text{niestabilny dla wszystkich } r > 1 \\ x^* = 1 - 1/r & \quad - \text{stabilny dla } 1 < r < 3 \end{aligned}$$

sprawdzenie:

$$\left| \frac{df(x=1-1/r)}{dx} \right| = |2-r| < 1$$

V. Można pokazać, że dla $1 < r < 3$ wszystkie warunki początkowe $x_0 \in (0,1)$ dążą do $x^* = 1 - 1/r$.
 $[0,1]$ jest **basenem atrakcji x^***

Przykład: Program logistic

Parametry:

- parametr kontrolny zmieniać od $r < 1$ do 3.1 i obserwować zachowanie układu
- warunek początkowy dowolny z basenu atrakcji (0,1)
- rząd złożenia 1

VI. Dla $r = 4$ niestabilne punkty stałe są gęste w (0,1)

Co się dzieje dla $3 < r < 4$?

Rozpatrzmy dwukrotnie złożone odwzorowanie logistyczne tj. $\cap^2(x)$.

Dla $r < 3$ mamy jeden punkt stały.

Dla $r = 3$ $\cap^2(x)$ jest styczne do przekątnej wykresu odwzorowania.

Dla $r > 3$ pojawiają się dwa nowe punkty stałe $\cap^2(x)$.

Nie są one punktami stałymi $\cap(x)$ więc tworzą one orbitę o okresie 2.

Jednocześnie widzimy, że punkt stały stabilny dla $r < 3$ przestał być stabilny (proszę sprawdzić (!) warunek stabilności tego punktu stałego dla $r > 3$):

Przykład: Program logistic

Parametry:

- rząd złożenia 2
- warunek początkowy dowolny z basenu atrakcji (0,1)
- parametr kontrolny najpierw $r = 2.85$. trajektoria zbiega do pojedynczego punktu stałego $x^* = 0.649$

Następnie zmienić parametr kontrolny na $r = 3.1$;

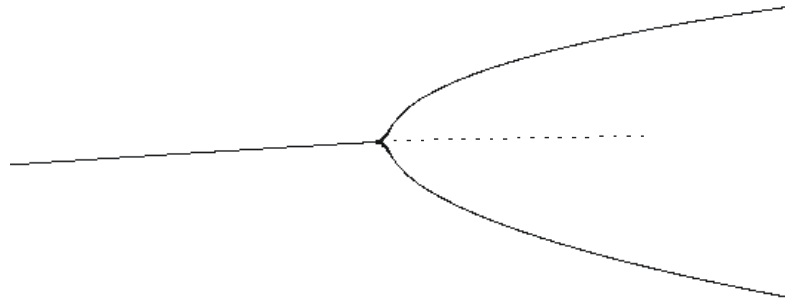
Punkt stały $x^* = 0.649$ traci stabilność.

Trajektoria zbiega do 2 różnych stabilnych punktów stałych w $x^* = 0.558$ oraz $x^* = 0.7645$.

Następnie zmienić rząd złożenia na 1

(skorzystać z klawisza „zmień rząd złożenia” a nie poprzez klawisz „parametry”).

Trajektoria jest orbitą o okresie 2 składającą się z ww. punktów stałych.



Bifurkacja podwajania okresu

linia przerywana - niestabilny punkt stały;

linia ciągła - stabilny punkt stały

Inaczej patrząc na ten sam problem:

- dla $1 < r < 3$ widzieliśmy, że wszystkie warunki początkowe

$x_0 \in (0,1)$ są przyciągane do $x^* = 1-1/r$

- współczynnik stabilności punktu stałego x^* $\lambda = 2 - r$

Otrzymuje wartość $\lambda_1 = 1$ dla $r = 1$ i maleje do $\lambda_1 = -1$ gdy $r = 3$ (punkt bifurkacji)

- Współczynnik stabilności orbit o okresie 2

$$\lambda_2 = \cap'(e)\cap'(f) \text{ gdzie } e, f \text{ punkty orbity;}$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ dla } r = 3 \text{ i maleje osiągając wartość } -1 \text{ dla pewnego } r = r_1 > 3.$$

Dla $r > r_1$ orbita o okresie 2 przestała być stabilna bo $|\lambda_2| > 1$.

- Dla parametru kontrolnego $r = r_1$ oba punkty orbity o okresie 2 podlegają bifurkacji.

Obraz jest podobny jak przy podwojeniu okresu dla $r = 3$

tyle że rolę \cap pełni teraz \cap^2

a rolę \cap^2 - odwzorowanie czterokrotnie złożone \cap^4 .

Przykład: Program logistic

Parametry:

- rząd złożenia 4
- warunek początkowy dowolny z basenu atrakcji (0,1)
- parametr kontrolny najpierw $r = 3.41$ trajektoria zbiega do 2 punktów stałych.

Następnie zmienić parametr kontrolny na $r = 3.5$;

Punkty stałe tracą stabilność.

Trajektoria zbiega do 4 innych stabilnych punktów stałych.

Następnie zmienić rząd złożenia na 1 (skorzystać z klawisza „zmień rząd złożenia” a nie poprzez klawisz „parametry”).

Trajektoria jest orbitą o okresie 4 składającą się z ww. punktów stałych.

- dalsze powiększanie parametru kontrolnego r prowadzi do ponownej bifurkacji podwajania okresu przy $r = r_2$.

- przy dalszym wzroście parametru powstaje nieskończona kaskada bifurkacji podwajania:
w każdym obszarze parametru kontrolnego $r_{m-1} < r \leq r_m$
stabilne są orbity o okresie 2^m .

Ćwiczenie: Spróbuj znaleźć wartości parametru kontrolnego odpowiadające następnym punktom podwojenia okresu. Podpowiedź: dobre wartości parametru kontrolnego to:
 $r = 3.54, 3.56, 3.565, 3.569$.

Zidentyfikuj orbity jakim te punkty odpowiadają odpowiadają.

- Feigenbaum pokazał (1978), że
obszar stabilności orbity o okresie 2^m maleje w przybliżeniu w stosunku geometrycznym:

$$\frac{r_m - r_{m-1}}{r_{m+1} - r_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 4.6692016091... \equiv \hat{\delta} \quad \text{stała Feigenbauma}$$

- istnieje więc **punkt akumulacji** $r_\infty = 3.5699456...$,
w którym liczba bifurkacji podwajania okresu osiąga nieskończoność

Orbity superstabilne

Są to orbity o okresie 2^m , których współczynnik stabilności znika.

Dzieje się tak dla pewnego $r = r_{ms}$.

Współczynnik stabilności orbity okresowej określony jest przez iloczyn pochodnych odwzorowania w punktach należących do tej orbity.

Dla orbity o okresie 2^m :

$$\lambda = \varphi'(\hat{x}_0) \varphi'(\hat{x}_1) \dots \varphi'(\hat{x}_m)$$

gdzie \hat{x} oznacza punkt na orbicie.

Widzimy, że **punkt krytyczny** odwzorowania
tj. punkt w maksimum odwzorowania
leży na orbicie superstabilnej.

W tym punkcie pochodna znika \Leftrightarrow znika też współczynnik stabilności całej orbity.

Niech d_m będzie odległością punktu krytycznego
od **najbliższego** spośród pozostałych $2^m - 1$ punktów orbity periodycznej.

Ten najbliższy punkt jest przesunięty o $1/2$ okresu od punktu krytycznego:

$$d_m = \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2}$$

Okazuje się, że

$$\frac{d_m}{d_{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2.5029078750... \equiv \hat{\alpha}$$

Druga stała Feigenbauma

Przykład: orbity superstabilne

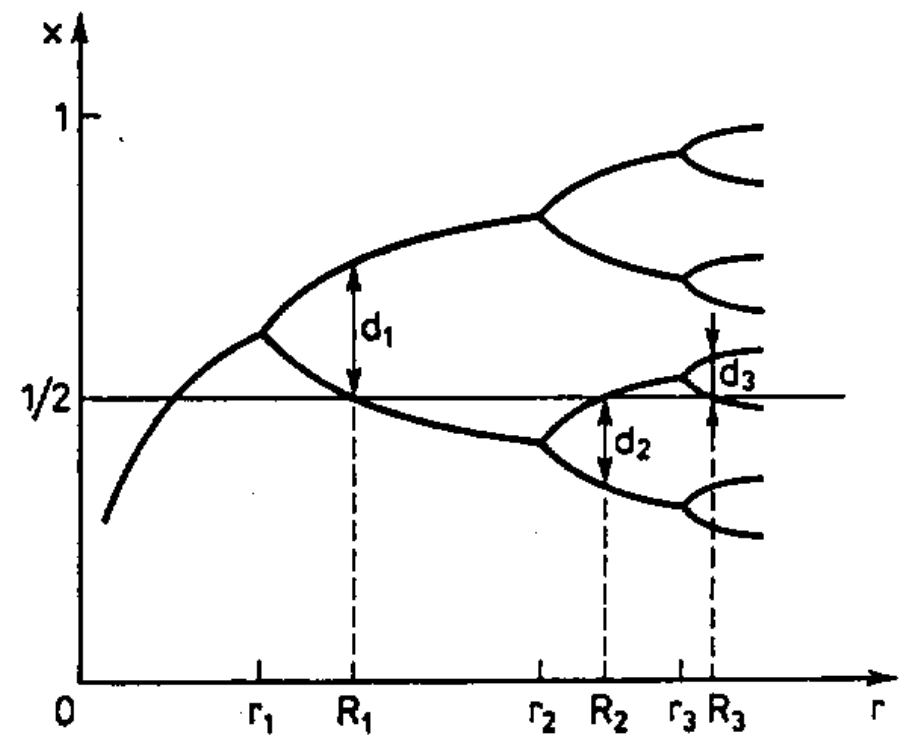
Program logistic

Parametry:

- rząd złożenia 1
- parametr kontrolny najpierw $r = 3.2364$
- warunek początkowy dowolny z basenu atrakcji $(0,1)$

Trajektoria zbiega do orbity o okresie 2: $x = 0.499885$ oraz $x = 0.8091$. Jest to więc z dobrym przybliżeniem orbita superstabilna.

Natomiast dla np. $r = 3.15$ orbita nie przechodzi przez $x = 0.5$ więc nie jest superstabilna.



A co się dzieje za punktem akumulacji dla $r > r_\infty$?

- powiększanie r powyżej r_∞ powoduje "zderzenie się" brzegów pasm widocznych na wykresie bifurkacyjnym aż dla $r = 4$ iteracje wypełniają cały odcinek $[0,1]$.

- ciemne linie na wykresie bifurkacyjnym są **obrazami punktu krytycznego** (punktów krytycznych) odwzorowania.

Tworzą tzw. "szkielet" wykresu bifurkacyjnego.

Analiza ewolucji punktów krytycznych odwzorowania pozwala przewidzieć wiele jego własności np. punkty zderzania się pasm chaotycznych.

- bifurkacje tangencjalne (styczne, siodło-węzeł) powodują powstawanie okien periodycznych.

Okna te są gęste w całym obszarze $[r_\infty, 4]$.

Tzn. Jeżeli dane jest r , dla którego odwzorowanie jest chaotyczne to w małym otoczeniu $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$ można znaleźć okna periodyczne niezależnie od wielkości ε .

Okno najlepiej widoczne - o okresie 3 –

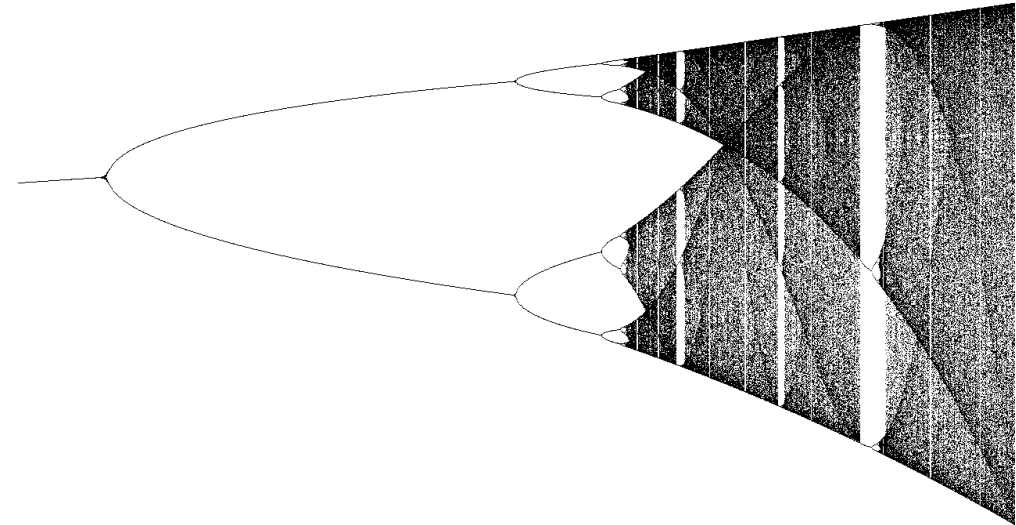
powstaje na skutek bifurkacji tangencjalnej 3-krotnie złożonego odwzorowania logistycznego \cap^3

Przykład:

Program logistic

Parametry:

- rząd złożenia 3
- parametr kontrolny najpierw $r = 3.825$



- warunek początkowy 0.5

Trajektoria przechodzi przez kanał intermitencyjny a potem błądzi chaotycznie dopóki nie wejdzie do następnego kanału. Układ znajduje się w stanie chaotycznym zwanym intermitencją I rodzaju.

- Zmień parametr kontrolny na $r = 3.84$ posługując się klawiszem „Dodaj wykres po bifurkacji”.
- Następnie użyj „Zmień rząd złożenia” na 1.

W ten sposób zmieniamy tylko rząd złożenia a nie parametr kontrolny !

Obserwuj trajektorie o okresie 3.

Trajektoria ta przechodzi przez wszystkie stabilne punkty stałe odwzorowania 3-krotnie złożonego.

W ten sposób powstaje jednocześnie

przyciągająca orbita o okresie 3 (**atraktor**) oraz niestabilna (odpychająca) orbita - **repeler** o okresie 3.

Kryzys: zderzenie chaotycznego rozwiązania stabilnego z niestabilną orbitą periodyczną.

Kryzysy powstają bo w trakcie bifurkacji powstają też repelery. Przy zmianie parametru kontrolnego zmieniają swoje położenie i dlatego może dojść do zderzenia z atraktorem.

Przykład:

Dla $r = 4$ równania logistycznego dochodzi do kryzysu brzegowego w wyniku, którego trajektoria zbiega do $-\infty$.

Do tego tematu wrócimy przy omawianiu przepływów ciągłych i układów o większej liczby wymiarów.

Twierdzenie Szarkowskiego (porządek Szarkowskiego): Dany jest ciąg:

$$\begin{aligned} &3, 5, 7, \dots, \\ &2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, \dots, \\ &2^2 \times 3, 2^2 \times 5, 2^2 \times 7, \dots, \\ &2^m, \dots, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1 \end{aligned}$$

Niech odwzorowanie ciągłe określone na całej osi rzeczywistej ma orbitę o okresie p .

Jeżeli p występuje w powyższym ciągu przed inną liczbą całkowitą l to dane odwzorowanie ma również orbitę periodyczną o okresie l .

(Nic nie wiadomo o jej stabilności !).

Wyżej napisany ciąg nosi nazwę **ciągu uniwersalnego** bo wykazano, że występuje on dla innych odwzorowań niż logistyczne.

Pojęcie to ma sens najprawdopodobniej tylko dla jednowymiarowych odwzorowań unimodlanych. Dla więcej niż jednowymiarowych odwzorowań nie tylko nie stwierdzono uporządkowania trajektorii periodycznych ale też zdarzają się współistniejące atraktory periodyczne o różnych basenach atrakcji.

Li i Yorke ("**Period three implies chaos**", Am. Math. Monthly 82, 985, 1975) wykazali, że gdy się pojawia trajektoria periodyczna o okresie 3 to z tego wynika, że istnieje również nieprzeliczalna liczba trajektorii, które pozostają nieperiodyczne na zawsze.

Wprowadzili termin "**chaos**" dla określenia takiej sytuacji.

Jak zobaczymy w swoim czasie bifurkacja podwajania okresu
 bifurkacja tangencjalna (styczna)
 opisane powyżej mają swoje odpowiedniki dla odwzorowań więcej niż jednowymiarowych
 i dla przepływów (równania różniczkowe).

Wykładnik Lapunowa dla odwzorowania logistycznego:

Dla $r = 4$ znaleźliśmy naturalną gęstość niezmienniczą $\rho_1(x) = \pi^{-1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

Wykładnik Lapunowa dany jest przez: $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |\varphi'(x_n)|$

co można obliczyć posługując się naturalną miarą niezmienniczą jako: $\lambda = \int_0^1 \rho_1(x) |\varphi'(x)| dx = \ln 2$

i jest taki sam dla odwzorowania namiotowego $\Delta(x)$ z parametrem $a = 1$.

Wniosek: Wykładnik Lapunowa nie zależy jak widać od wyboru współrzędnych.

Wpływ szumu na podwajanie okresu

Szum w deterministycznych układach jest zawsze obecny: albo jest on numeryczny albo też pochodzi z pomiaru.

Rodzaje szumu w układach dynamicznych:

a) **szum addytywny** $x_{n+1} = (1 - \varepsilon)f(x_n, p) + \varepsilon\xi_n$

gdzie f jest odwzorowaniem

p jest parametrem kontrolnym,

ξ_n jest dodatnio określoną zmienną losową o zadanym rozkładzie (najczęściej równomiernym lub normalnym, ale może być też np. szumem dychotomicznym)

ε parametr określający moc szumu

Czynnik $1 - \varepsilon$ dodaje się po to aby utrzymać wartości x_{n+1} wewnątrz basenu atrakcji odwzorowania tj. aby $x \in (0,1)$.

b) **szum parametryczny** $x_{n+1} = f(x_n, p_0 + \Delta p \xi_n)$

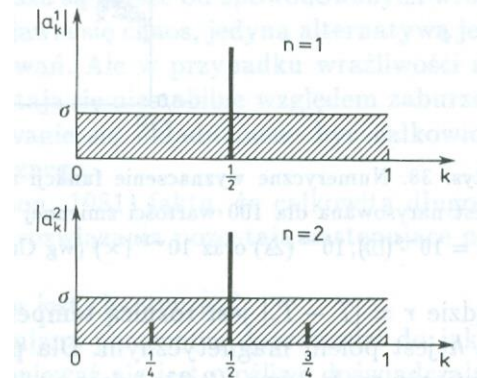
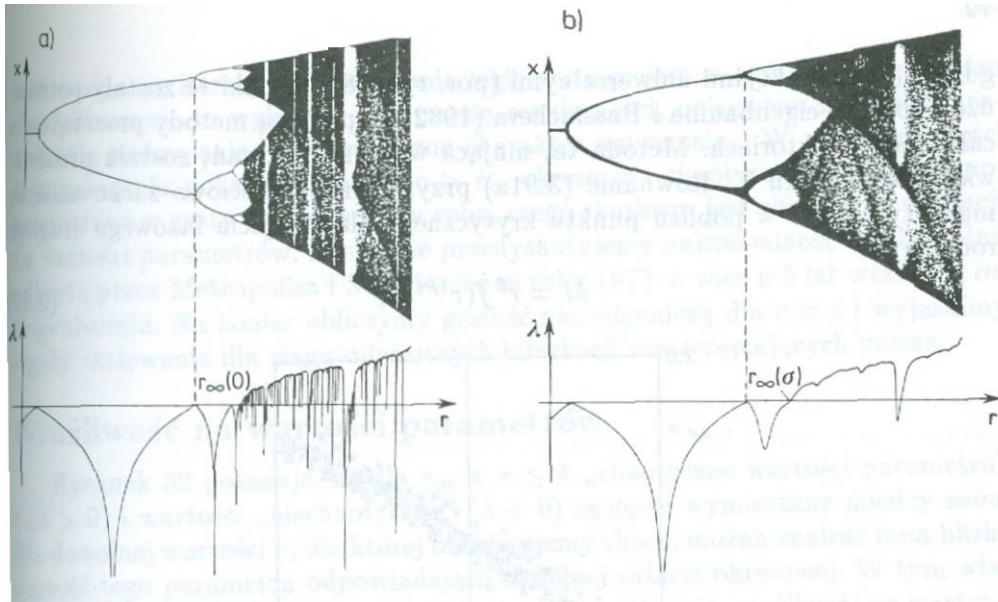
gdzie ξ_n jest zmienną losową tym razem zawartą w przedziale $[-1,1]$

Δp określa zakres zmian parametru kontrolnego p

c) **szum pomiarowy** ('zabrudzenie sygnału szumem'): szum nie zmienia dynamiki układu ale występuje w sygnale i zniekształca go.

ad a) Syntetycznie biorąc: szum powoduje skrócenie kaskady podwajania okresu - staje się ona skończona i chaos pojawia się nieco przed r_∞ . Aby zobaczyć następne "piętro" kaskady trzeba zmniejszyć szum.

Szum wpływa też na wykładnik Lapunowa.



Chociaż Schuster i inni autorzy podręczników twierdzą, że szum nie niszczy przejścia do chaosu w $r = r_\infty$ dla odwzorowań unimodalnych

to trzeba pamiętać, że w niektórych pracach dowodzi się, że szum numeryczny (zaokrąglenia) może sztucznie stabilizować okresowe rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych.