PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Optyka 1

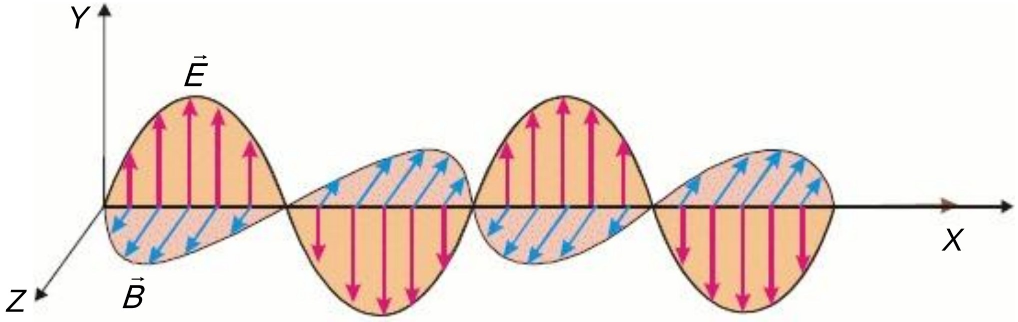
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Optyka I

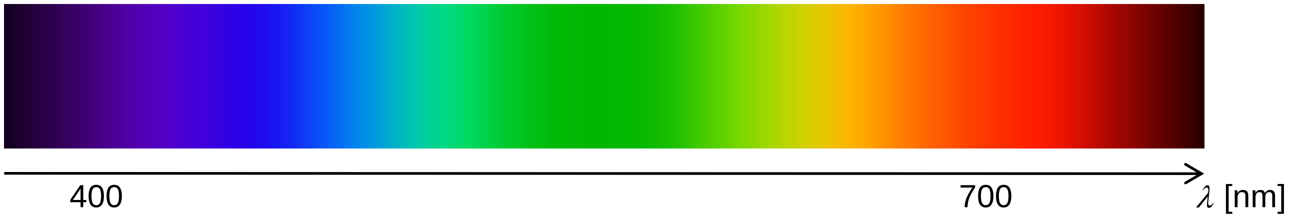
Światło to fala elektromagnetyczna (rozchodzące się w przestrzeni zaburzenie pola elektrycznego i magnetycznego), która w próżni propaguje się z prędkością c, bliską $3 \cdot 10^8$ m/s.



Prędkość fali związana jest z częstotliwością ν (barwą) i długością fali λ wzorem:

$$\boxed{\upsilon = \nu \cdot \lambda}$$

W obszarze widzialnym, długości fal świetlnych mieszczą się w granicach od ok. 360 nm do ok. 770 nm.



Przyrządy optyczne mają rozmiar około 0,1 m. Długość fali świetlnej to około $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ m, czyli jest około milion razy mniejsza od rozmiarów przyrządów. W takim przypadku możemy zaniedbać w naszych rozważaniach naturę falową, zakładając, że światło rozchodzi się w ośrodku jednorodnym po linii prostej . Te kierunki rozchodzenia się światła nazywa się promieniami świetlnymi.

Bieg promieni świetlnych opisuje zasada Fermata.

Światło rozchodzi się w przestrzeni po takiej drodze, że czas jej przebycia jest ekstremalny (zwykle minimalny).

Przy przejściu światła do innego ośrodka zmienia się prędkość i długość fali, a częstotliwość pozostaje bez zmiany.

$$\boxed{v = \frac{c}{n}}$$

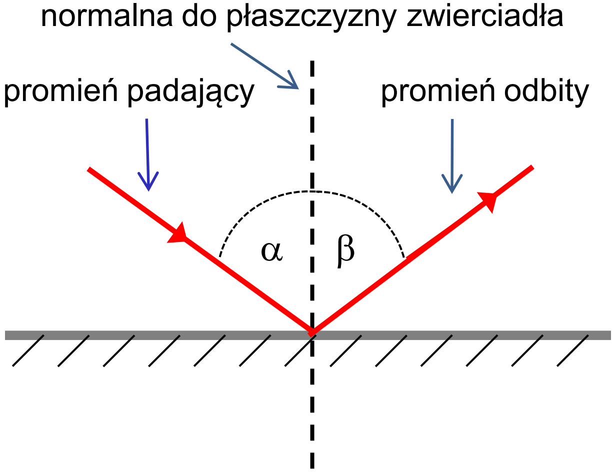
gdzie n jest współczynnikiem załamania ośrodka względem próżni, tzw. bezwzględnym współczynnikiem załamania.

Światło padając na granicę dwóch ośrodków częściowo ulega odbiciu, a częściowo przechodzi do drugiego ośrodka. W oparciu o zasadę Fermata można sformułować prawo odbicia i załamania światła na granicy dwóch ośrodków.

Prawo odbicia

Jeżeli światło pada na powierzchnię zwierciadła (odbijającą) to odbija sie od niego tak, że promień padający i odbity leżą w jednej płaszczyźnie oraz kąt padania równy jest kątowi odbicia.

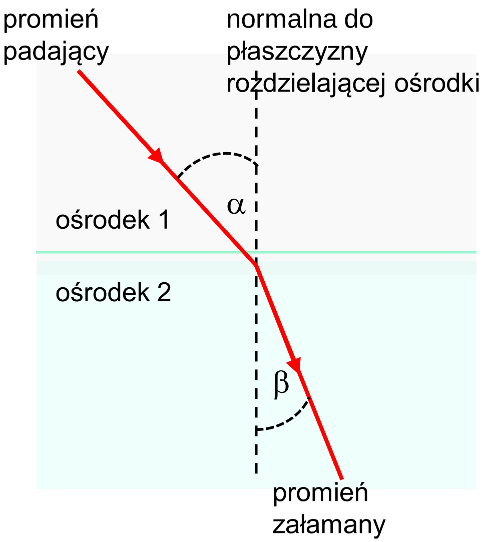
$$\alpha = \beta$$



Prawo załamania (Snelliusa)

Na granicy dwóch ośrodków promień świetlny ulega załamaniu tak, że kąt padania i załamania spełniają relację:

$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta$$



gdzie n_1 i n_2 są współczynnikami załamania odpowiednio ośrodka pierwszego i drugiego.

Często posługujemy się tzw. względnym współczynnikiem załamania:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

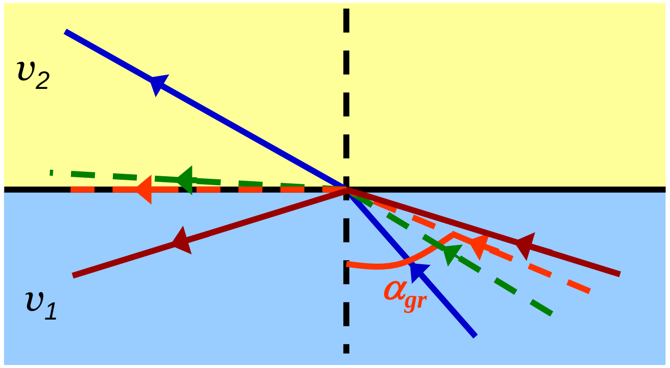
gdzie n_{21} jest współczynnikiem załamania ośrodka 2 względem 1.

Jeśli prędkość rozchodzenia się światła w ośrodku 1 jest większa od jego prędkości w ośrodku 2, to mówimy, że ośrodek 1 jest rzadszy optycznie. Wtedy zachodzi relacja dla współczynników załamania.

$n_1 < n_2$ a w konsekwencji $\alpha > \beta$

Kąt graniczny

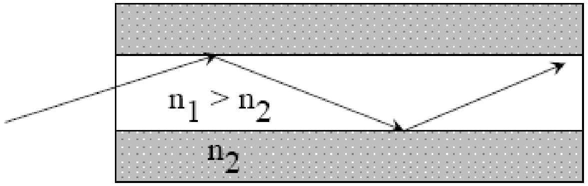
Jeśli promień padający biegnie w ośrodku gęstszym optycznie (czyli $v_1 < v_2$), to kąt załamania jest większy od kąta padania. Zwiększając kąt padania dochodzimy do sytuacji, gdy kąt załamania równy jest 90^0. **Taki kąt padania nazywamy kątem granicznym.** Sinus kąta granicznego jest odwrotnością współczynnika załamania ośrodka gęstszego optyczne względem ośrodka rzadszego optycznie. Jeśli światło pada na granicę ośrodków pod kątem większym od granicznego to odbija się w całości od granicy. Jest to zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia.



$$v_1 < v_2$$

$$\frac{\sin\alpha_{gr}}{\sin 90^0} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n_{21}}$$

$$\boxed{\sin\alpha_{gr} = \frac{1}{n}}$$



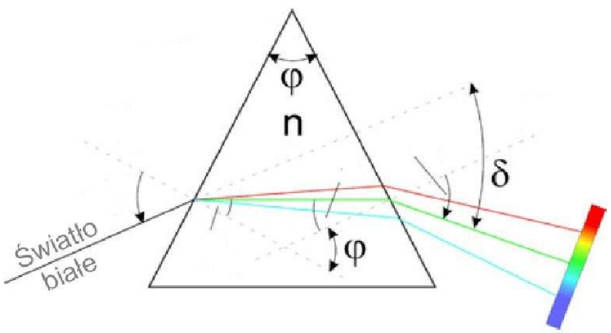
Światłowód (przekrój) jako przykład wykorzystania całkowitego wewnętrznego odbicia.

W praktyce, najczęściej światło padając na granicę dwóch ośrodków częściowo odbija się, a pozostała część przechodzi do drugiego ośrodka i ulega załamaniu.

Pryzmat

Pryzmat jest elementem (przyrządem) optycznym mającym kształt klina. Wykonany jest z przezroczystego materiału o współczynniku załamania n. Kąt dwuścienny między nierównoległymi płaszczyznami nazywamy kątem łamiącym pryzmatu φ. Kąt jaki tworzy promień wychodzący z pryzmatu z kierunkiem promienia padającego to kąt odchylenia δ.

Przykłady wykorzystania pryzmatu zostały zilustrowane poniżej: do rozszczepienia światła białego, odbicia pod kątem 90^o i 180^o.



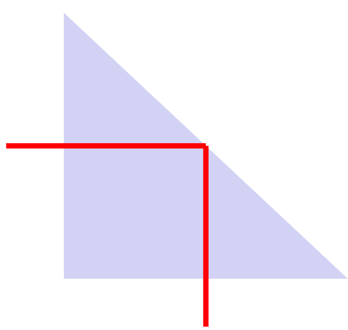
Rozszczepienia światła białego w pryzmacie

Przybliżony wzór na kąt odchylenia δ pryzmatu o współczynniku załamania n, dla małych kątów φ i małych kątów padania

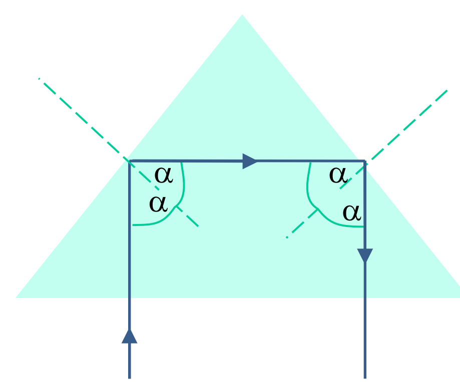
$$\delta = (n-1)\cdot\varphi$$

Współczynnik załamania pryzmatu n, jego kąt łamiący φ i kąt minimalnego odchylenia promieni δ_{min} wiąże zależność:

$$n = \frac{\sin\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$



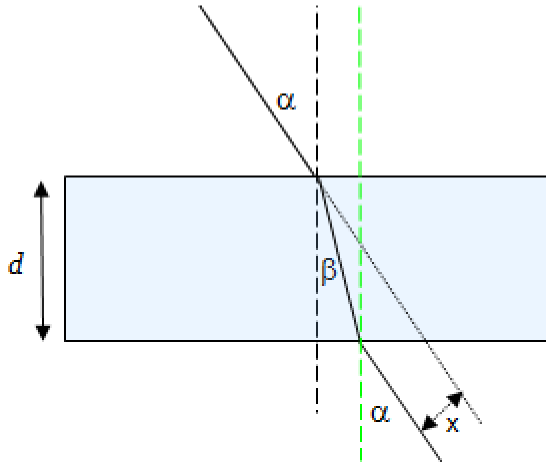
Odbicie pod kątem 90^o w pryzmacie



Odbicie pod kątem 180^o w pryzmacie

Zadania z rozwiązaniami

Przykład 1
Na płytkę płasko-równoległa o grubości d wykonaną z materiału o współczynniku załamania n i umieszczoną w próżni pada promień światła pod kątem α. Wyznacz przesunięcie promienia po wyjściu z płytki.
Rozwiązanie



Zgodnie z prawem załamania $\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$

Jeśli l jest drogą promienia w płytce to

$$\cos\beta = \frac{d}{l}$$

Promień padający na płytkę i wychodzący z płytki są do siebie równoległe, więc

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{x}{l}$$

Teraz po przekształceniach otrzymujemy, że

$$x = l \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{d}{\cos\beta} \cdot (\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)$$

$$x = d \cdot \sin\alpha \cdot \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)$$

Odpowiedź: Po przejściu przez płytkę promień doznaje przesunięcia o $x = d \cdot \sin\alpha \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)$

Zadania z rozwiązaniami

Przykład 2
Jaka musi być grubość szklanej płyty, aby światło padające prostopadle na jej powierzchnię po przejściu przez płytę było opóźnione w stosunku do promienia biegnącego w powietrzu o Δt = 1μs? Współczynnik załamania szkła wynosi n = 1,5. Przyjąć $c=3\cdot 10^8$m/s.

<u>Rozwiązanie</u>

Czas potrzebny na przebycie drogi d z prędkością v, w szkle $$t_{sz} = \frac{d}{v}$$

Czas potrzebny na przebycie drogi d z prędkością c, w powietrzu $$t_p = \frac{d}{c}$$

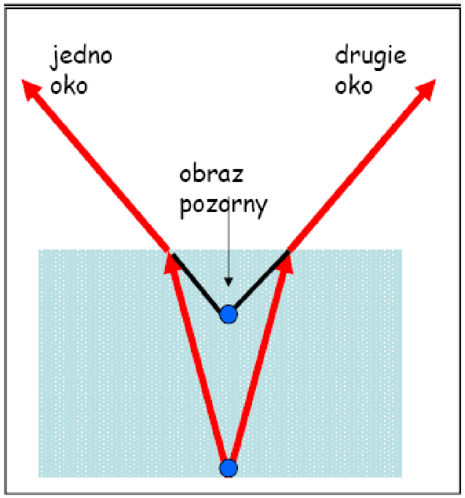
Opóźnienie czasowe $$\Delta t = t_{sz} - t_p = d \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right)$$

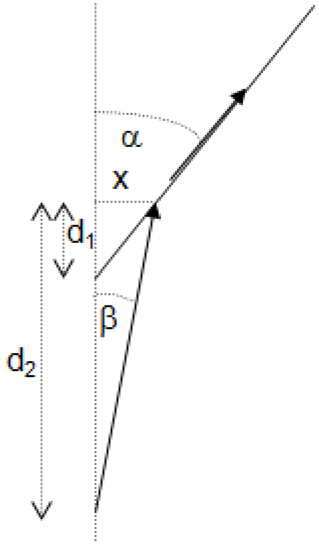
Ale $n = \frac{c}{v}$ więc $$d = \frac{c \cdot \Delta t}{n-1} = \frac{3 \cdot 10^8\ {}^{m}\!/\!_{s} \cdot 10^{-6}\, s}{1{,}5 - 1} = 6 \cdot 10^2\, m$$

<u>Odpowiedź</u> Powinna to być płyta o grubości 600 m.

Zadania z rozwiązaniami

Przykład 3
Na dnie basenu znajduje się przedmiot. Patrząc pionowo z góry na powierzchnię wody oceniono, że odległość przedmiotu od powierzchni wody wynosi d_1 = 2 m. Oblicz jaka jest rzeczywista głębokość basenu d_2 w tym punkcie, wiedząc, że współczynnik załamania światła w wodzie n = 1,33.
Rozwiązanie





Rys. Zasada powstania obrazu pozornego przedmiotu znajdującego się na pewnej głębokości w wodzie – przedmiot widzimy na przedłużeniu promieni, które dotarły do oczu.

Z rysunku pomocniczego mamy, że

$$tg\alpha = \frac{x}{d_1} \qquad tg\beta = \frac{x}{d_2}$$

Z prawa załamania światła

$$\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$$

Ponieważ kąty α i β są bardzo małe – oczy są blisko siebie, to możemy przyjąć, żę:

$$tg\alpha = \sin\alpha \qquad tg\beta = \sin\beta$$

Teraz możemy już obliczyć głębokość basenu

$$d_2 = \frac{d_1 \cdot tg\alpha}{tg\beta} \approx d_1 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = nd_1$$

Odpowiedź Głębokość basenu wynosiła około 2,66 m.

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1

Z jaką prędkością propaguje się światło w szkle o bezwzględnym współczynniku załamania n = 1,5? Jaka jest długość fali tego światła w szkle, jeśli w próżni długość jego fali wynosi λ = 450 nm?

<u>Rozwiązanie</u>

Pamiętamy, że prędkość światła w próżni to prawie $3 \cdot 10^8$ m/s. W innych ośrodkach prędkość światła jest mniejsza i obliczyć można ją ze wzoru

$$\boxed{v = \frac{c}{n}}$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania ośrodka względem próżni, tzw. bezwzględnym współczynnikiem załamania.

W tym zadaniu obliczamy, że w szkle $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5}\left[\frac{m}{s}\right] = 2 \cdot 10^8\left[\frac{m}{s}\right]$

Prędkość fali v związana jest z częstotliwością ν (barwą) i długością fali λ wzorem: $\boxed{v = \nu \cdot \lambda}$

Przy przejściu światła z próżni do szkła zmienia się prędkość i długość fali, a jej częstotliwość pozostaje bez zmiany, więc

w próżni $\nu = \frac{c}{\lambda}$ oraz w szkle $\nu = \frac{v}{\lambda_s}$ Zatem, $\lambda_s = \lambda \cdot \frac{v}{c}$ $\lambda_s = 450 \cdot \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}[nm] = 300[nm]$

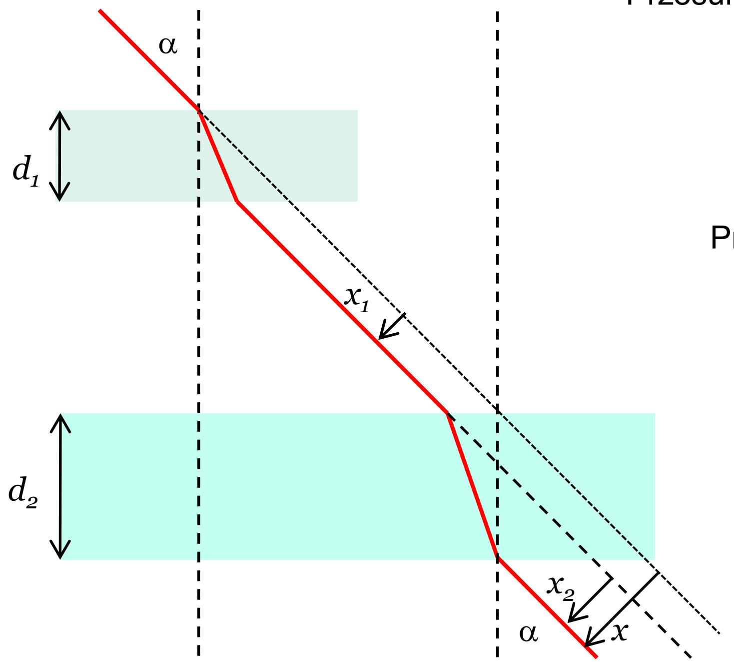
<u>Odpowiedź</u> Prędkość w szkle to $2 \cdot 10^8$ m/s, a długość fali to 300 nm.

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 2

Na dwie płytki płasko-równoległe o grubości d_1 *i* d_2 wykonane z materiałów o współczynnikach załamania n_1 i n_2 umieszczone w powietrzu pada promień światła pod kątem α. Pomiędzy płytkami znajduje się warstwa powietrza. Wyznacz przesunięcie promienia po wyjściu z takiego układu płytek.

Rozwiązanie



Wykorzystamy tu wynik z rozwiązanego już przykładu 1.
Przesunięcie x_1, dla pierwszej płytki będzie

$$x_1 = d_1 \cdot \sin\alpha \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}} \right)$$

Przesunięcie x_2, dla drugiej płytki będzie

$$x_2 = d_2 \cdot \sin\alpha \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha}} \right)$$

Promień padający na pierwszą płytkę i wychodzący z drugiej płytki są do siebie równoległe, a szukane przesunięcie promienia x jest sumą

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = (d_1 + d_2) \cdot \sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{d_1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha}} \right)$$

Odpowiedź Przesunięcie promienia świetlnego nie zależy od grubości warstwy powietrza.

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 3
Promień światła monochromatycznego przechodzi przez pryzmat o kącie łamiącym $\varphi = 60^0$ odchylony o kąt minimalny $\delta_{min} = 60^0$ Jaki jest współczynnik załamania pryzmatu dla tego światła?
Rozwiązanie

Współczynnik załamania pryzmatu n, jego kąt łamiący φ i kąt minimalnego odchylenia promieni δ_{min} wiąże zależność:

$$n = \frac{\sin\frac{\delta_{min} + \varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

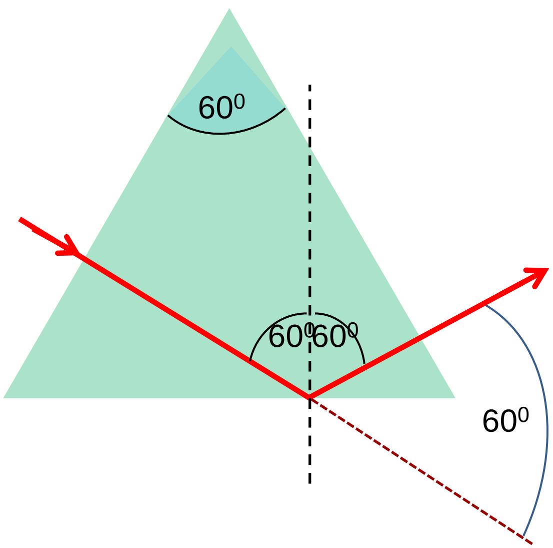
Szukany współczynnik załamania pryzmatu n obliczymy wstawiając do powyższego wzoru wartości podane w treści zadania.

$$n = \frac{\sin\frac{60^0 + 60^0}{2}}{\sin\frac{60^0}{2}} = \frac{\sin 60^0}{\sin 30^0} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

Odpowiedź Wartość tego współczynnika załamania wynosi 1,73.

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 4
Pryzmat szklany o współczynniku załamania n = 1,5 ma w przekroju kształt trójkąta równobocznego. Promień świetlny pada prostopadle na jedną ze ścian. Wyznaczyć kąt pomiędzy kierunkiem promienia padającego i promieniem wychodzącym z pryzmatu.
<u>Rozwiązanie</u>



Promień padający prostopadle to jest pod kątem padania 0^0 na ścianę pryzmatu nie załamuje się w szkle i dociera do podstawy pryzmatu (podstawy trójkąta równobocznego na rysunku). Kąt padania wynosi tu 60^0 i jest to kąt większy od kąta granicznego, bo

$$\sin\alpha_{gr} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} < \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Następuje więc całkowite wewnętrzne odbicie oraz oczywiście

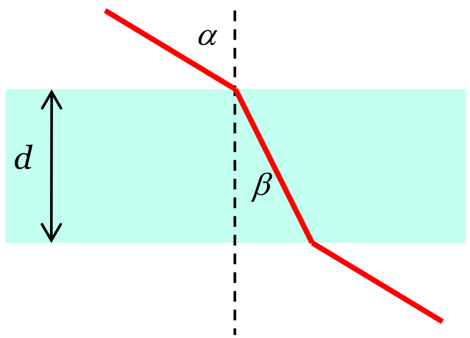
$$\boxed{\text{kąt padania} = \text{kąt odbicia} = 60^0}$$

Promień odbity pada na trzecią na ścianę pryzmatu pod kątem prostym, nie załamuje się i wychodzi z pryzmatu. Z rysunku widać, że kierunki promienia wchodzącego i wychodzącego z pryzmatu tworzą kąt 60^0.

<u>Odpowiedź</u> To kąt 60^0.

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 5
Na szklaną płytkę płasko-równoległą o grubości d i umieszczoną w próżni pada pod kątem α światło monochromatyczne o długości fali λ_1 . Długość fali światła w szkle wynosi λ_2, a prędkość światła w próżni równa jest c. Wyznacz czas biegu promienia we wnętrzu płytki.
Rozwiązanie



Jeśli l jest drogą promienia w płytce to czas na jej przebycie $\boxed{t=\dfrac{l}{v}}$

Zgodnie z prawem załamania $\sin\alpha = n\cdot\sin\beta$ oraz $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Z rysunku $\cos\beta = \dfrac{d}{l}$ więc $l=\dfrac{d}{\cos\beta}$

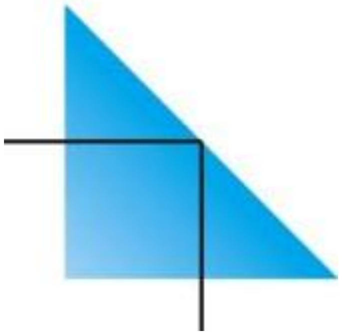
ale $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$ czyli $\cos\beta = \sqrt{1-\dfrac{\lambda_2^2\cdot\sin^2\alpha}{\lambda_1^2}}$

Ponieważ $n=\dfrac{c}{v}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ to $v=c\cdot\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ oraz $t=\dfrac{d\cdot\lambda_1^2}{c\cdot\lambda_2\cdot\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_2^2\cdot\sin^2\alpha}}$

Odpowiedź Poszukiwany czas obliczymy ze wzoru. $t=\dfrac{d\cdot\lambda_1^2}{c\cdot\lambda_2\cdot\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_2^2\cdot\sin^2\alpha}}$

Zadania do rozwiązania

Zadanie 1
Promień światła pada prostopadle na pryzmat o przekroju trójkąta prostokątnego równoramiennego. Jaka powinna być wartość współczynnika załamania materiału, z którego wykonano pryzmat, by promień odbił się całkowicie od drugiej ścianki pryzmatu?



Odpowiedź Dla kąta granicznego $n = \sqrt{2}$

Zadanie 2
Światło przechodzi ze szkła o współczynniku załamania n = 1,58 do powietrza. Przy jakim kącie padania kąt ten będzie dwa razy mniejszy od kąta załamania?

Odpowiedź Przy kącie $38{,}7^0$.

Zadanie 3
W dwóch ośrodkach o bezwzględnych współczynnikach załamania n_1=1,5 i n_2=1,2 biegnie promień światła monochromatycznego. Grubości warstw ośrodków są jednakowe. Oblicz stosunek czasów przejścia światła przez te ośrodki.

Odpowiedź: Ten stosunek ma wartość 1,25.

Zadania do rozwiązania

Zadanie 4.
Z jaką szybkością porusza się światło w szkle o bezwzględnym współczynniku załamania n = 1,5? Jaka jest długość fali tego światła w szkle, jeśli w próżni długość jego fali wynosi λ = 600 nm?

Odpowiedź Porusza się z prędkością $2 \cdot 10^8$ m/s, a jego długość fali to 400 nm.

Zadanie 5.
Pionowy słupek zanurzony całkowicie rzuca na dno jeziora cień o długości równej 3/5 swej długości. Oblicz pod jakim kątem padają na powierzchnię jeziora promienie słoneczne. Współczynnik załamania światła dla wody n = 1,33.

Odpowiedź Padają pod kątem $43,15^0$.

Zadanie 6
W krysztale znajduje się kulista przestrzeń wypełniona powietrzem. Na kryształ, prostopadle do jego powierzchni, pada równoległa wiązka światła. Oblicz współczynnik załamania światła dla kryształu, jeżeli do wnętrza tej kulistej przestrzeni wnikają promienie światła odległe od jej pionowej osi o co najwyżej 2/3 r, gdzie r jest promieniem tej przestrzeni.

Odpowiedź Wartość tego współczynnika załamania wynosi 1,5.

Zadania do rozwiązania

Zadanie 7

Na płytkę płasko-równoległa o grubości d wykonaną z materiału o nieznanym współczynniku załamania i umieszczoną w próżni pada promień światła pod kątem α. Przesunięcie promienia po wyjściu z płytki wynosi x. Oblicz nieznany współczynnik załamania płytki n.

Odpowiedź
$$n = \frac{\sqrt{d^2 - 2xd \cdot sin\alpha + x^2}}{d - x / sin\alpha}$$

Zadanie 8

Wiązka światła monochromatycznego pada prostopadle na ścianę pryzmatu o kącie łamiącym $\varphi = 30^0$, a wychodzi odchylona o kąt $\delta = 15^0$. Oblicz wartość współczynnika załamania pryzmatu n.

Odpowiedź $n = \sqrt{2}$

Zadanie 9

Promień światła pada pod kątem α na dwie, identyczne, leżące jedna na drugiej płytki płasko-równoległe o grubości d każda, wykonane z materiału o współczynniku załamania n, umieszczone w powietrzu. Wyznacz przesunięcie promienia po wyjściu z takiego układu płytek.

Odpowiedź
$$x = 2 \cdot d \cdot \left(sin\alpha - \frac{sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - sin^2 \alpha}} \right)$$

Zadanie 10

Promień światła czerwonego o częstotliwości $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Hz przechodzi z powietrza do wody o współczynniku załamania n = 1,33. Oblicz, o ile zmieni się przy tym długość fali ? Prędkość światła w powietrzu c = 3 $\cdot 10^8$ m/s.

Odpowiedź Przy przechodzeniu światła z powietrza do wody długość fali zmaleje o 149 nm.

Zadania do rozwiązania

Zadanie 11

Promień światła pada prostopadle na umieszczoną w próżni płytkę o grubości d i przechodzi przez nią w czasie t. Jaki jest sinus kąta granicznego dla materiału tej płytki?

Odpowiedź $d/c{\cdot}t$