

# Obwody prądu zmiennego



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Prąd elektryczny: moc

Ilość ciepła wydzielanego na elemencie oporowym określa prawo Joule'a:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t$$

Moc prądu definiujemy jako stosunek wydzielonego ciepła do czasu:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

**Zad. 1. Czajnik z grzałką elektryczną ma podgrzać 1 litr wody od temperatury 20°C do temperatury wrzenia. Ile energii zużyje? Jakie jest natężenie prądu jest niezbędne, aby proces podgrzewania zajął nie więcej niż dziesięć minut, jeśli wartość napięcia (prądu stałego) wynosi 40V? Pojemność cieplną czajnika można zaniedbać. Ciepło właściwe wody  $C_w = 4190 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$**

Ilość energii potrzebnej do podgrzania wody wynosi:  $Q = mC_w\Delta T$

Po obliczeniu otrzymujemy wartość 335.2 kJ

Moc czajnika wyrażona jest wzorem:  $P = \frac{Q}{t} = UI$ , gdzie  $t$  – czas podgrzewania.

stąd szukane natężenie:  $I = \frac{Q}{tU}$

Po obliczeniu otrzymujemy wartość natężenia 13.97 A.

# Prąd elektryczny: moc

**Zad. 2.** Elektrownia o mocy  $P = 1$  MW przesyła energię elektryczną do pobliskiej fabryki. Całkowity opór linii przesyłowej wynosi  $R_L = 5 \Omega$ . Jakie musi być napięcie na linii przesyłowej, aby moc stracona na linii wynosiła 5% mocy elektrowni?

Moc elektrowni możemy zapisać jako

$$P = UI$$

Linie przesyłową traktujemy jako element oporowy, na którym następuje rozpraszanie ciepła. Straty mocy zależą od kwadratu natężenia:

$$P_{str} = R_L I^2$$

Zadany stosunek strat do mocy produkowanej wynosi 5%

$$\frac{P_{str}}{P} = \frac{5}{100}$$

Stąd obliczamy natężenie prądu:

$$I^2 = \frac{5 \cdot P}{100 \cdot R_L}$$

Po podstawieniu danych, wartość natężenia prądu  $I$  wynosi 100 A.

Na tej podstawie obliczamy napięcie:

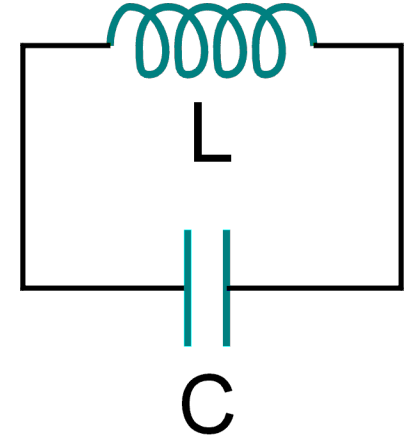
$$U = \frac{P}{I}$$

Otrzymujemy wynik  $U = 10$  kV.

# Obwód LC

Opis matematyczny obwodów prądu zmiennego jest podobny do opisu drgań harmonicznycch odważnika umieszczonego na sprężynie - rolę analogiczną do przemieszczenia odgrywa ładunek.

Jeśli naładowany kondensator połączymy równoległe z cewką, kondensator zacznie się rozładowywać. Doprowadzi to do wzrostu natężenia prądu płynącego przez cewkę, a w konsekwencji – do zmagazynowania energii w cewce w postaci pola magnetycznego. Po całkowitym rozładowaniu kondensatora, prąd w obwodzie nadal płynął, ponieważ pole magnetyczne wytworzone przez cewkę będzie przeciwstawiać się zmianie natężenia. Doprowadzi to do naładowania kondensatora.



Korzystając z II prawa Kirchoffa:  $U_L + U_C = 0$

Wartości napięcia na okładkach kondensatora i na cewce opisujemy wyrażeniami:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad U_C = \frac{q}{C}$$

Otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} \cdot q$$

Jest to równanie drgań harmonicznycch, z częstotliwością drgań własnych:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Energia zgromadzona w cewce:

$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Energia zgromadzona w kondensatorze:

$$E_C = \frac{q^2}{2C}$$

# Obwód LC

**Zad. 3.** Obwód LC składa się z cewki o pojemności  $L = 1\text{ mH}$  i pojemności  $C = 1\text{ nF}$ . W chwili  $t=0$  całkowity prąd płynący przez obwód wynosi  $I = 1\text{ A}$ , a kondensator jest rozładowany. Oblicz, po jakim czasie wartość ładunku zgromadzonego na okładkach kondensatora osiągnie wartość maksymalną i podaj tę wartość.

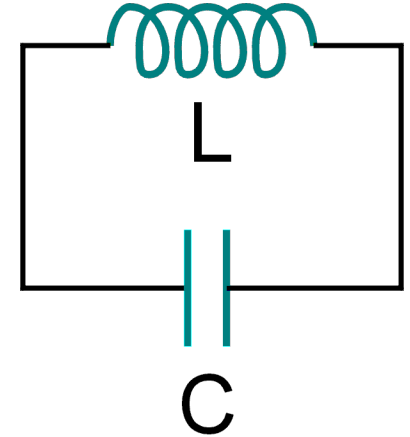
W chwili  $t=0$  kondensator jest rozładowany, a zatem cała energia jest zgromadzona w cewce w postaci pola magnetycznego

$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Energia w obwodzie jest zachowana, a zatem energia ta jest równa energii kondensatora po jego całkowitym naładowaniu:

$$E_C = \frac{q^2}{2C} = E_L$$

Z równania obliczamy maksymalny ładunek  $Q$  zgromadzony na kondensatorze, który wynosi  $1 \cdot 10^{-6}\text{ C}$ .



Wiemy, że częstość własna drgań obwodu wynosi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Na tej podstawie możemy obliczyć okres drgań:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Szukany czas wynosi pół okresu – cała energia obwodu jest wtedy zgromadzona w kondensatorze.

$$t_x = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{LC}$$

Po obliczeniu otrzymujemy wartość  $t_x = 3.14 \cdot 10^{-6}\text{ s}$ .

# Obwody prądu zmiennego. Reaktancja

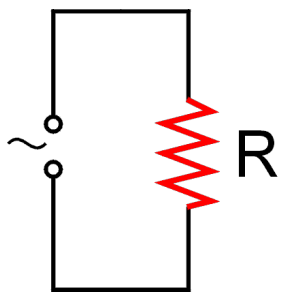
Siła elektromotoryczna wytwarzana przez prądnicę prądu zmiennego jest sinusoidalnie zmienna:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$$

gdzie  $\omega$  oznacza częstość kołową, a  $\varepsilon_m$  – amplitudę drgań.

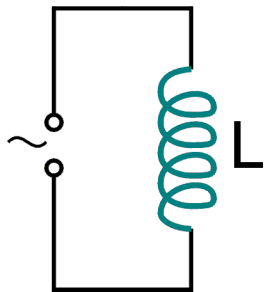
$$I = I_m \sin(\omega t - \phi)$$

gdzie  $I_m$  – amplituda natężenia,  $\phi$  – faza początkowa



$$I = \frac{U_m}{R} \sin \omega t$$

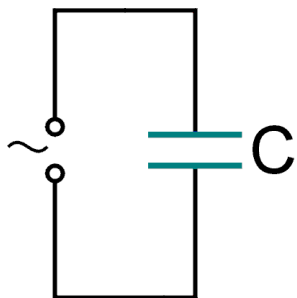
Natężenie prądu płynącego przez opornik jest w fazie z napięciem wymuszającym (maksimum natężenia odpowiada maksimum napięcia), zatem faza  $\phi = 0$



$$X_L = \omega L$$

$$I = \frac{U_m}{X_L} \sin(\omega t - \pi/2)$$

$X_L$  oznacza reaktancję cewki. Natężenie opóźnia się względem napięcia wymuszającego o  $\pi/2$ .



$$X_c = \frac{1}{\omega C}$$

$$I = \frac{U_m}{X_c} \sin(\omega t + \pi/2)$$

$X_c$  oznacza reaktancję kondensatora. Natężenie wyprzedza napięcie wymuszające o  $\pi/2$ .

# Obwód RLC prądu zmiennego

W obwodzie szeregowym zawierającym kondensator, cewkę i opornik amplituda drgań harmoniczných maleje wykładniczo – na oporniku energia jest rozpraszana w postaci ciepła.

Po podłączeniu obwodu do źródła prądu zmiennego wymuszone drgania ładunku odbywają się z częstością wymuszającą.

Związek między amplitudą natężenia prądu a amplitudą napięcia opisuje wyrażenie:

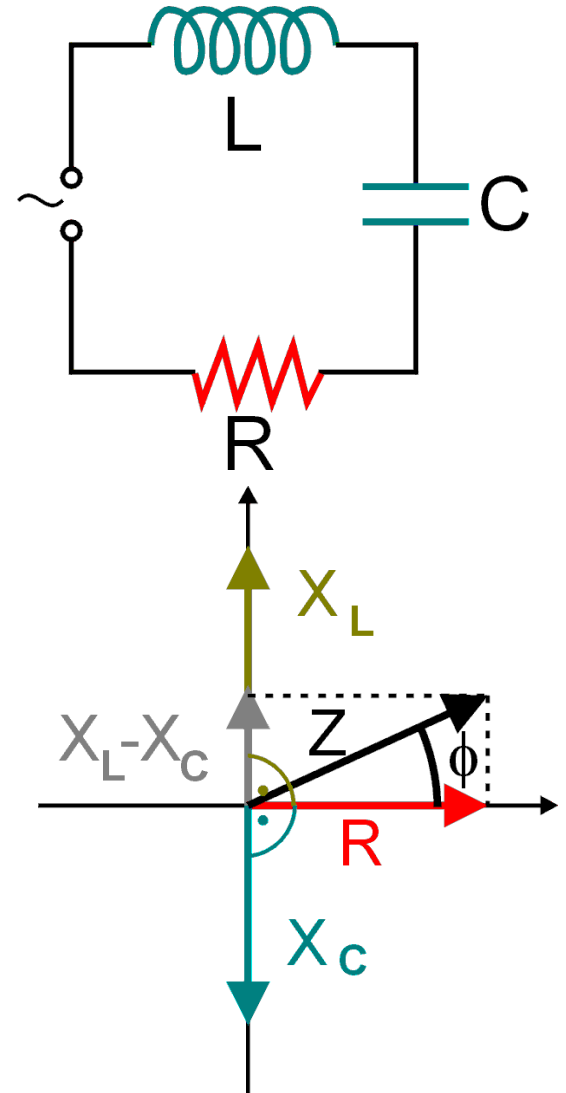
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

gdzie  $Z$  oznacza impedancję obwodu.

Fazę początkową  $\phi$  określa wyrażenie:  $\operatorname{tg} \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$

Jeśli częstość wymuszająca jest równa częstości własnej obwodu, to  $X_L = X_C$ , a zatem  $\phi = 0$ . Jest to efekt rezonansowy, który odpowiada maksymalnemu natężeniu prądu (i maksymalnej mocy rozpraszanej) na oporniku.

Impedancję można przedstawić graficznie jako sumę wektorów odpowiadających oporowi i reaktancjom.



# Moc w obwodach prądu zmiennego

W obwodzie RLC średnia energia, zgromadzona w kondensatorze i cewce pozostaje stała. Energia jest rozpraszana w postaci ciepła na oporniku.

$$I = I_m \sin(\omega t - \phi) \quad P = I^2 R = I_m^2 R \sin^2(\omega t - \phi) \quad \text{gdzie } I_m \text{ – amplituda natężenia.}$$

Tak zdefiniowana moc jest wartością chwilową. Na ogół interesuje nas średnia wartość mocy wydzielanej na oporniku. Ponieważ średnia funkcji  $\sin^2 x$  wynosi  $\frac{1}{2}$ , wyrażenie możemy zapisać jako:

$$P_{\text{sr}} = \frac{I_m^2 R}{2} = \left( \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R = I_{\text{sk}}^2 R$$

$I_{\text{sk}}$  oznacza natężenie skuteczne prądu zmiennego.

Podobnie definiujemy wartość skuteczną napięcia:

$$U_{\text{sk}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{sk}} = \frac{U_{\text{sk}}}{Z}$$

Stąd średnia moc wydzielana na oporniku:

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}} \cdot I_{\text{sk}} R = \frac{U_{\text{sk}}}{Z} I_{\text{sk}} R$$

Ponieważ  $\frac{R}{Z} = \cos \phi$  moc możemy zapisać również jako:  $P_{\text{sr}} = U_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi$



# Obwód RLC prądu zmiennego

**Zad. 4.** Cewka o indukcyjności  $L=0,1$  H, kondensator o pojemności  $C=10$   $\mu\text{F}$  i opornik o oporze  $R=100$   $\Omega$  są podłączone szeregowo do źródła napięcia zmiennego o częstotliwości  $f=50$  Hz i wartości skutecznej  $U_{sk}=220$  V. Oblicz wartość skuteczną natężenia prądu w obwodzie szeregowym RLC i moc rozpraszaną w obwodzie. Podaj przesunięcie fazowe między prądem w obwodzie a napięciem zasilającym, przedstaw graficznie impedancję.

Zaczynamy od obliczenia impedancji obwodu. Wyraża się ona wzorem:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad X_L = 2\pi f L$$

Otrzymujemy:  $X_L=31.42$   $\Omega$ ,  $X_C= 318.3$   $\Omega$ , i  $Z=303.8$   $\Omega$

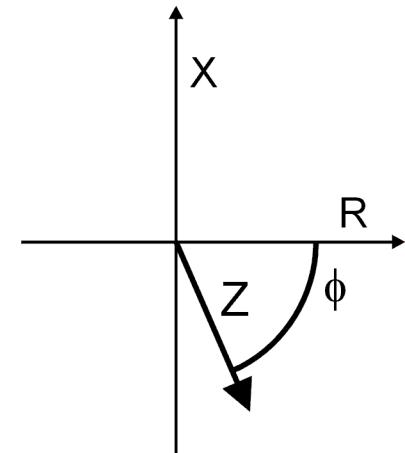
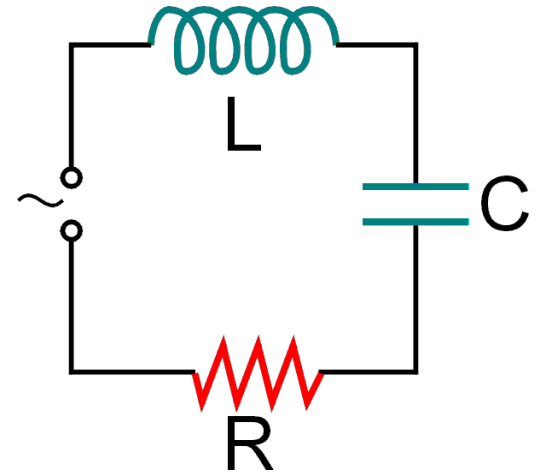
$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{Z} \quad \text{Otrzymujemy wartość natężenia } I_{sk} = 0.72 \text{ A.}$$

Moc rozpraszana w obwodzie wyniesie:  $P_{sr} = I_{sk}^2 R$

Wartość obliczona wynosi 51.84 W

$$\text{Obliczamy przesunięcie fazowe: } \text{tg } \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Przesunięcie fazowe  $\phi$  wynosi  $-70.8^\circ$ . Impedancja ma charakter pojemnościowy – natężenie wyprzedza napięcie wymuszające.



# Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Terenowy samochód elektryczny o masie  $m=1000$  kg podjeżdża z prędkością  $V= 9$  km/h na wzgórze nachylone pod kątem  $\alpha = 30^\circ$  do poziomu. Zaniedbując straty energii na tarcie oblicz, jakie jest natężenie prądu dostarczanego do silnika z akumulatora o sile elektromotorycznej  $\varepsilon = 24$  V.
2. Opornik o oporze  $R = 100 \Omega$  jest podłączony do źródła napięcia stałego  $U = 10V$ . Jaką wartość oporu i w jaki sposób należy od niego dołączyć, aby moc rozpraszana na oporniku spadła dwukrotnie?
3. Kondensator o pojemności  $C=2 \mu F$  naładowano do napięcia  $U = 500V$ , a następnie podłączono równolegle do cewki o indukcyjności  $L = 0.1$  H. Po jakim czasie od podłączenia cewki natężenie prądu płynącego w obwodzie jest maksymalne, i jaką ma wartość?
4. Kondensator o pojemności  $C$  i cewka o indukcyjności  $L$  tworzą zamknięty obwód. Jaki kondensator, i w jaki sposób należy włączyć do obwodu by uzyskać okres drgań własnych a) dwa razy większy, b) trzykrotnie mniejszy?
5. Cewka o indukcyjności  $L=1$  H i oporze  $R=5 \Omega$  podłączona została do źródła prądu zmiennego o amplitudzie  $U_m = 100V$  i częstotliwości  $f=1$  kHz. Traktując cewkę jako połączenie szeregowe idealnej cewki i opornika, oblicz moc wydzielaną na oporze cewki. Jaka jest pojemność kondensatora, który należy dołączyć szeregowo do cewki, aby moc wydzielana na oporze cewki była największa? Podaj wartość maksymalną tej mocy.
6. Szeregowy obwód RLC składa się z cewki o indukcyjności  $L=0,5$  mH, opornika  $R=100 \Omega$  i kondensatora o pojemności regulowanej płynnie od  $C_1=200$  pF do  $C_2=2000$  pF. Obwód podłączony jest do generatora napięcia zmiennego o częstotliwości  $f=200$  kHz i amplitudzie  $U_m=20$  V. Przy jakiej wartości pojemności  $C$  moc  $P$  wydzielana w oporniku jest (a) największa, (b) najmniejsza? Jakie są te wartości mocy wydzielanej (c) największa  $P_{\max}$  (d) najmniejsza  $P_{\min}$ ?