

Ewolucja Wszechświata

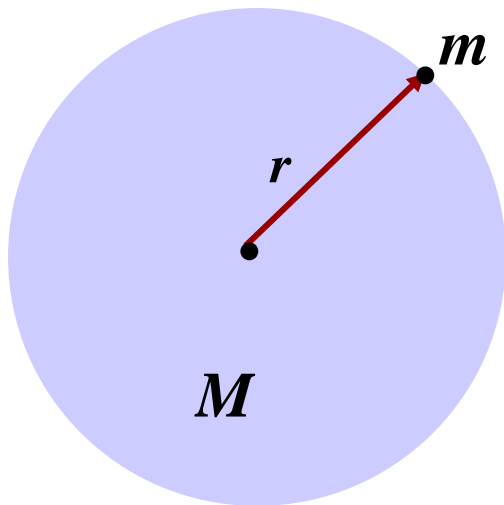
Wykład 2

Modele Wszechświata

Równanie Friedmana

Obserwator znajduje się w jednorodnym, rozszerzającym się ośrodku o gęstości ρ .

Zasada kosmologiczna – za środek można uznać dowolny punkt.



Jeśli materia rozłożona jest sferycznie symetrycznie, wypadkowa siła grawitacji działająca na ciało w odległości r od centrum pochodzi tylko od materii położonej wewnątrz sfery o promieniu r .

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Siła grawitacji

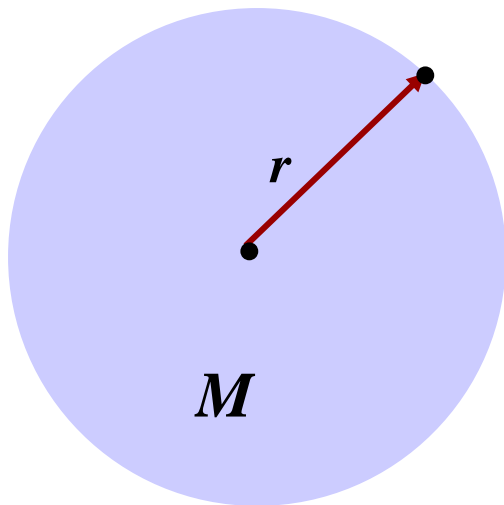
$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Grawitacyjna energia potencjalna

Newtonowska teoria grawitacji

$$M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3}$$



energia potencjalna:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}$$

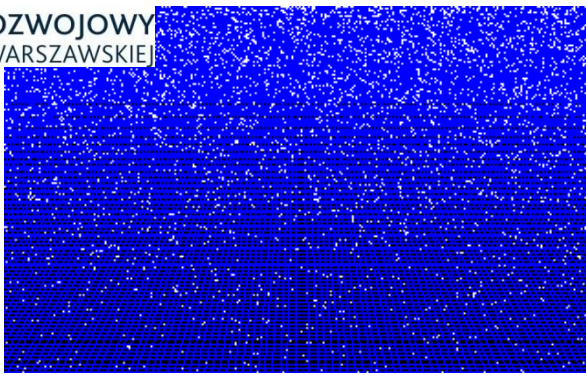
energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{m\dot{r}^2}{2}$$

Zasada zachowania energii:

$$U = E_k + E_p = const$$

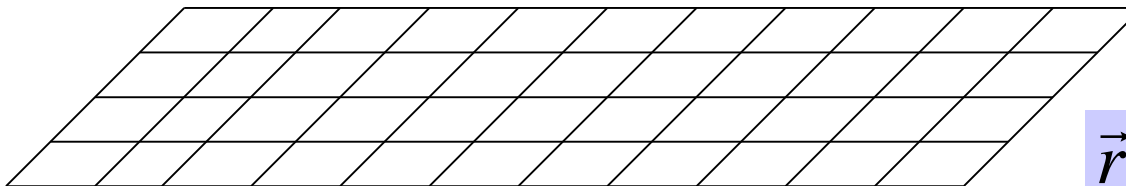
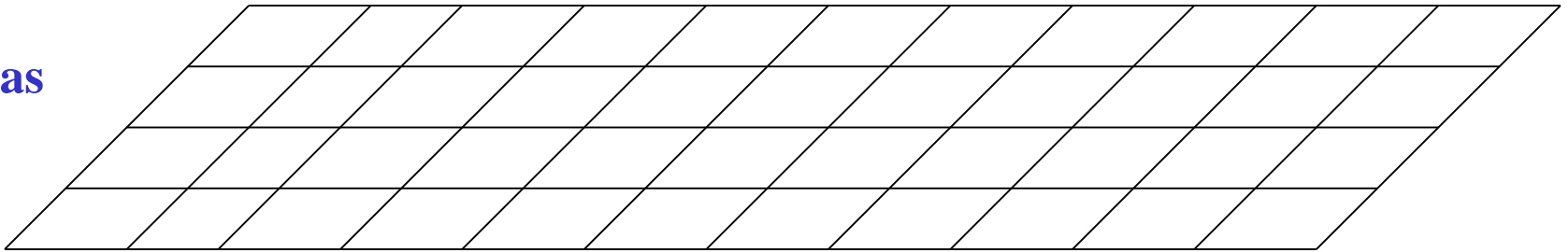
Równanie Friedmana



Przechodzimy do **współrzędnych współporuszających się**, które są unoszone przez rozszerzający się **Wszechświat**.

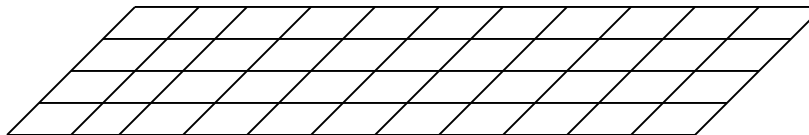
$$U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m$$

czas



$$\vec{r} = a(t) \cdot \vec{x}$$

W układzie wsp. x galaktyki mają stałe w czasie położenia.





Równanie Friedmana

$a(t)$ – czynnik skali Wszechświata (miara tempa ekspansji).

$$U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m \quad \vec{r} = a(t) \cdot \vec{x} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} m \dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho a^2 x^2 m$$

Mnożymy obie strony przez

$$\frac{2}{m a^2 x^2} \quad \frac{2U}{m a^2 x^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi}{3} G \rho$$

i porządkujemy:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{2U}{m x^2 a^2}$$

$-kc^2$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

$$k = -\frac{2U}{m c^2 x^2}$$

stała w przestrzeni i czasie





$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} = \frac{\dot{a}x}{ax} \cdot \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \cdot \vec{r}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Prawo Hubble'a:

$$\frac{\dot{a}}{a} \cdot \vec{r} = H \cdot \vec{r}$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = H$$

gdy $c = 1$:

H - stała Hubble'a

G – stała grawitacji

ρ - gęstość materii Wszechświata

c – prędkość światła

$k = -2U/mc^2x^2$

a – czynnik skali – mierzy średnie oddalenie dwóch punktów (np. gromad galaktyk)

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}$$

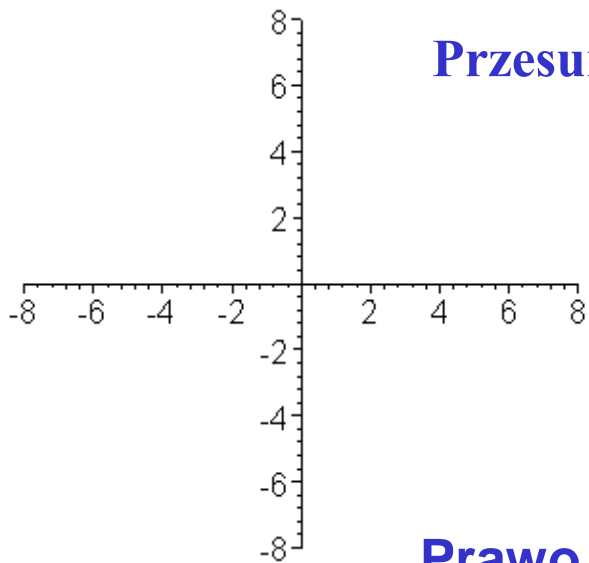
$H(t)$ maleje w czasie – ekspansja coraz wolniejsza z powodu przyciągania grawitacyjnego.

Co się rozszerza?

Czy przestrzeń może rozszerzać się z prędkością $> c$?

Ekspansja i przesunięcie ku czerwieni

Przesunięcie ku czerwieni z:



$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

Długość fali obserwowanej

Długość fali emitowanej

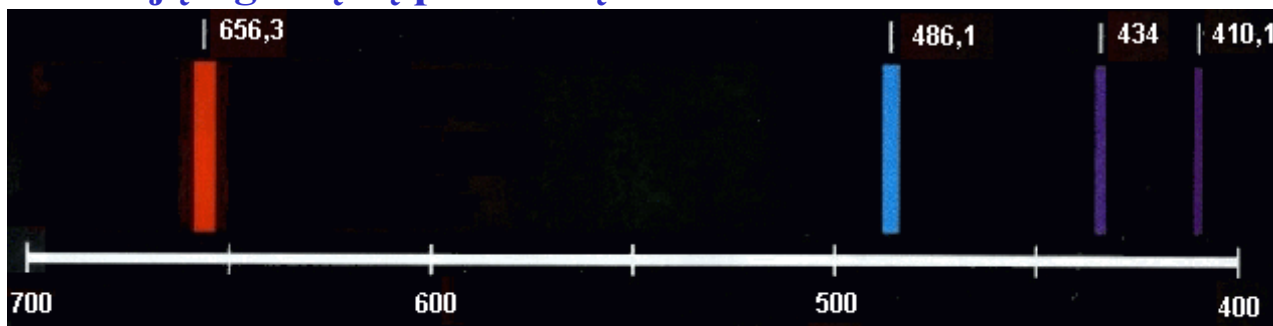
Prędkość oddalania

Prawo Dopplera:

$$z = \frac{v}{c}$$

Prędkość światła

Charakterystyczne linie widmowe pierwiastków pochodzące ze źródła oddalającego się są przesunięte ku czerwieni.



Linie widmo wodoru



Ekspansja i przesunięcie ku czerwieni



Względna prędkość obiektów A i B: $dv = Hdr = \frac{\dot{a}}{a} dr$

Zmiana długości fali: $d\lambda = \lambda_{obs} - \lambda_{em}$

Z prawa Dopplera: $\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{dv}{c}$

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{\dot{a}}{a} dr \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt} \frac{dr}{c} = \frac{da}{a}$$

$\frac{dr}{c} = dt$

dt - czas trwania ruchu światła





Ekspansja i przesunięcie ku czerwieni

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{da}{a}$$

Po scałkowaniu:

$$\ln \lambda = \ln a + const$$

$$\ln \frac{\lambda}{a} = const$$

$$\frac{\lambda}{a} = const$$

**Długość fali wprost proporcjonalna do rozmiarów
Wszechświata**

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a_{obs}}{a_{em}}$$

Przesunięcie ku czerwieni z oznacza, że fala była wyemitowana, gdy Wszechświat był $z+1$ razy mniejszy.





Równanie cieczy

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}$$

Aby rozwiązać równanie Friedmana trzeba wiedzieć, jak zmienia się w czasie gęstość ρ i ciśnienie p materii Wszechświata.

z I zasady termodynamiki :

$$dE + pdV = TdS$$

$$E = mc^2 = V\rho c^2 = \frac{4\pi a^3}{3} \rho c^2$$

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3$$



Równanie cieczy

$$E = \frac{4\pi a^3}{3} \rho c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2$$

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}$$

$$dE + p dV = T dS$$

Ekspansja odwracalna: $dS = 0$

$$\cancel{4\pi a^2} \rho c^2 \dot{a} + \frac{\cancel{4\pi}}{3} a^3 \dot{\rho} c^2 + p \cdot \cancel{4\pi a^2} \dot{a} = 0 \quad \bigg/ : a^3 c^2$$



Równanie cieczy

$$\cancel{4\pi a^2} \rho c^2 \dot{a} + \frac{\cancel{4\pi}}{3} a^3 \dot{\rho} c^2 + p \cdot \cancel{4\pi a^2} \dot{a} = 0 \quad / : a^3 c^2$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

Na zmianę gęstości wpływają 2 czony:

1. rozrzedzenie materii na skutek wzrostu objętości
2. strata energii związana z wykonaniem pracy przez ciśnienie w trakcie ekspansji – stracona energia zamieniona na grawitacyjną energię potencjalną



Przyspieszenie ekspansji

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

← Różniczkujemy względem czasu

$$2\frac{\dot{a}}{a} \cdot \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3}$$

Podstawiamy: $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2}$$

Ponownie korzystamy z równania Friedmana



Przyspieszenie ekspansji

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

Ujemny znak przyspieszenia – ekspansja zwalnia na skutek grawitacji

Ciśnienie materii powoduje zwiększenie siły grawitacji i jeszcze większe spowolnienie ekspansji.

Ciśnienie związane z oddziaływaniem między cząstkami – energii oddziaływania odpowiada masa $E = mc^2$



Rozwiązania równań

O ewolucji Wszechświata decyduje jego zawartość

Zależność $\rho(p)$ – równanie stanu.

Poszukamy rozwiązań dla 2 skrajnych sytuacji:

1. Wszechświat jest wypełniony tylko **materia nierelatywistyczną** – nie ma promieniowania.

Pył $p = 0$

Materia jest tak rozrzedzona, że nie dochodzi do zderzeń, więc ciśnienie równe zero.

Przykład : galaktyki to gaz bezzderzeniowy

2. Wszechświat jest wypełniony tylko **promieniowaniem**.

Ciśnienie: $p = \rho \cdot c^2 / 3$





Pył

Pył: $p = 0$ - materia nierelatywistyczna

Szukamy rozwiązania dla $k = 0$

Z równania cieczy:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0$$



$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0$$



$$\rho \propto \frac{1}{a^3}$$

Pyt

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$$

w chwili obecnej $t = t_0$

$$a = 1$$

$$\rho = \rho_0$$

$$k = 0$$

Z równania Friedmana:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$



$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{a}$$

Rozwiązanie:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

Promieniowanie

Promieniowanie: $p = \rho \cdot c^2/3$

Z równania cieczy: $\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$

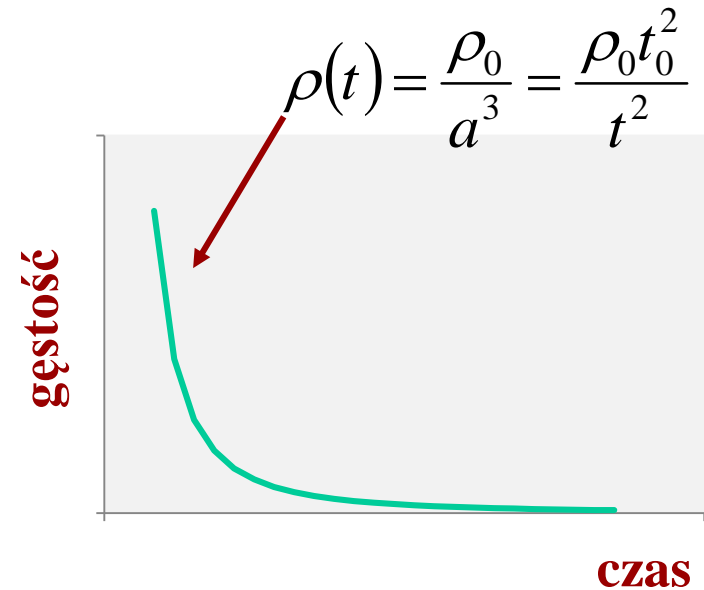
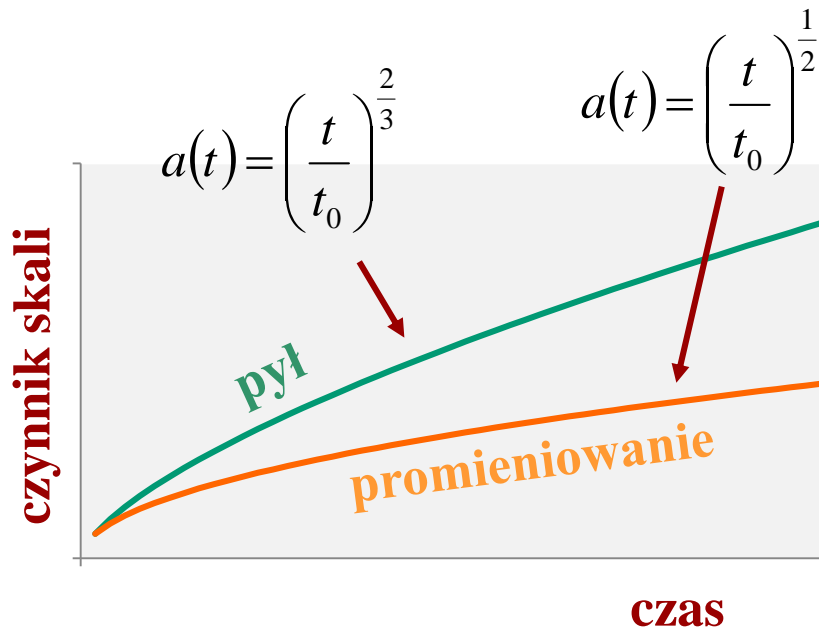
$$\dot{\rho} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto \frac{1}{a^4}$$

Rozwiązanie równania Friedmana :

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

Wszechświat wypełniony promieniowaniem rozszerza się wolniej niż wypełniony pyłem



Tempo ekspansji maleje z czasem

Pył: $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$

Promieniowanie: $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}$



Los Wszechświata

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Czy możliwe będzie zatrzymanie się ekspansji Wszechświata?

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow H = 0 \quad ?$$

Jeśli $k < 0$, to H będzie zawsze dodatnie.



Wszechświat zawsze będzie się rozszerzał

Jeśli $k = 0$, to H będzie asymptotycznie mała do zera



Wszechświat będzie się rozszerzał, ale coraz wolniej.

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$



Los Wszechświata

Jeśli $k > 0$:

Gęstość odwrotnie proporcjonalna do objętości: $\rho \propto \frac{1}{a^3}$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

$\propto \frac{1}{a^3}$ $\propto \frac{1}{a^2}$

Pierwszy wyraz maleje szybciej niż drugi – początkowo H^2 jest dodatnie, ale w końcu spadnie do zera.



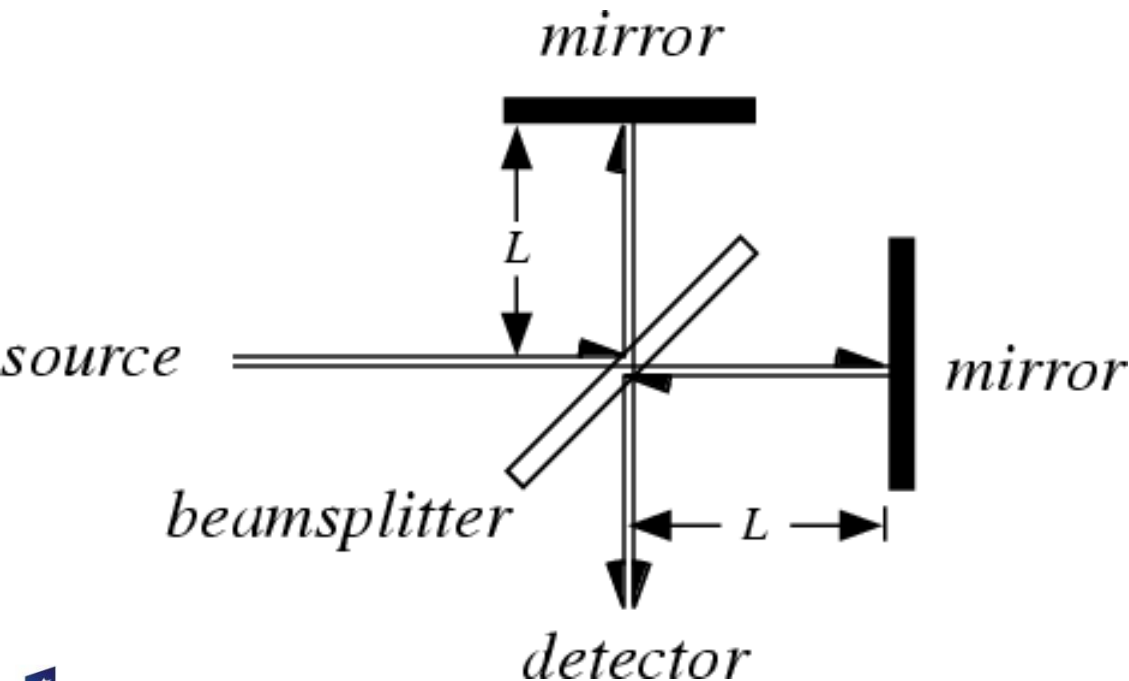
Wszechświat przestanie się rozszerzać i zacznie się kurczyć.

Teoria względności

Koniec XIX wieku – (prawie) kompletny opis wszechświata

Hipoteza eteru – ośrodka, w którym rozchodzą się fale elektromagnetyczne.

Doświadczenie Michelsona-Morleya (1887) - pomiar prędkości światła.



Wynik: światło ma stałą prędkość niezależną od prędkości obserwatora!



1905 – Szczególna Teoria Względności:

- Istotny jest tylko ruch względny
- Skoro nie można stwierdzić, że ktoś się porusza w przestrzeni, to pojęcie eteru zbędne
- Prawa fizyki są jednakowe w każdym układzie inercyjnym, w szczególności prędkość światła jest stała





Konsekwencje tych założeń:

- Nie istnieje czas absolutny – każdy obserwator ma swój własny czas
- Długość w kierunku ruchu ulega skróceniu:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Czas w układzie poruszającym się ulega wydłużeniu

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$





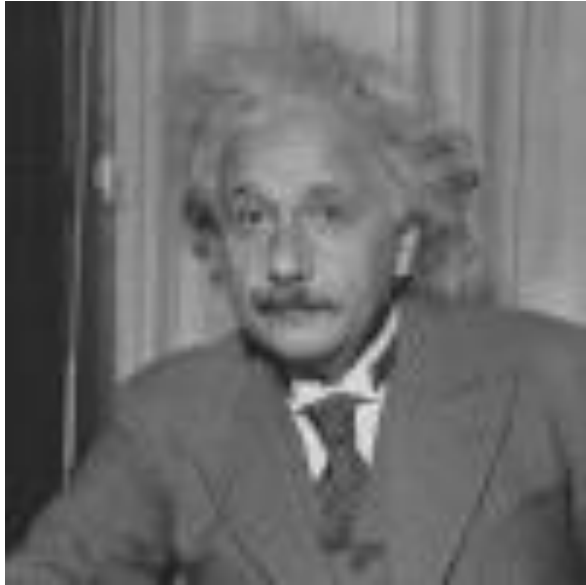
- Masa ciała poruszającego się wzrasta:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Masa i energia są równoważne:

$$E = mc^2$$

- Żadne ciało o masie spoczynkowej większej od zera nie może osiągnąć prędkości światła.



Albert Einstein

1879 - 1955

Ogólna Teoria Względności (1915):

$$G_{\mu\nu} = \delta\pi T_{\mu\nu}$$

geometria

materia

OTW wiąże geometrię czasoprzestrzeni z rozkładem materii.



Ogólna Teoria Względności

- Równoważność siły grawitacji i siły bezwładności w układzie nieinercyjnym
- Pole grawitacyjne równoważne zakrzywieniu czasoprzestrzeni

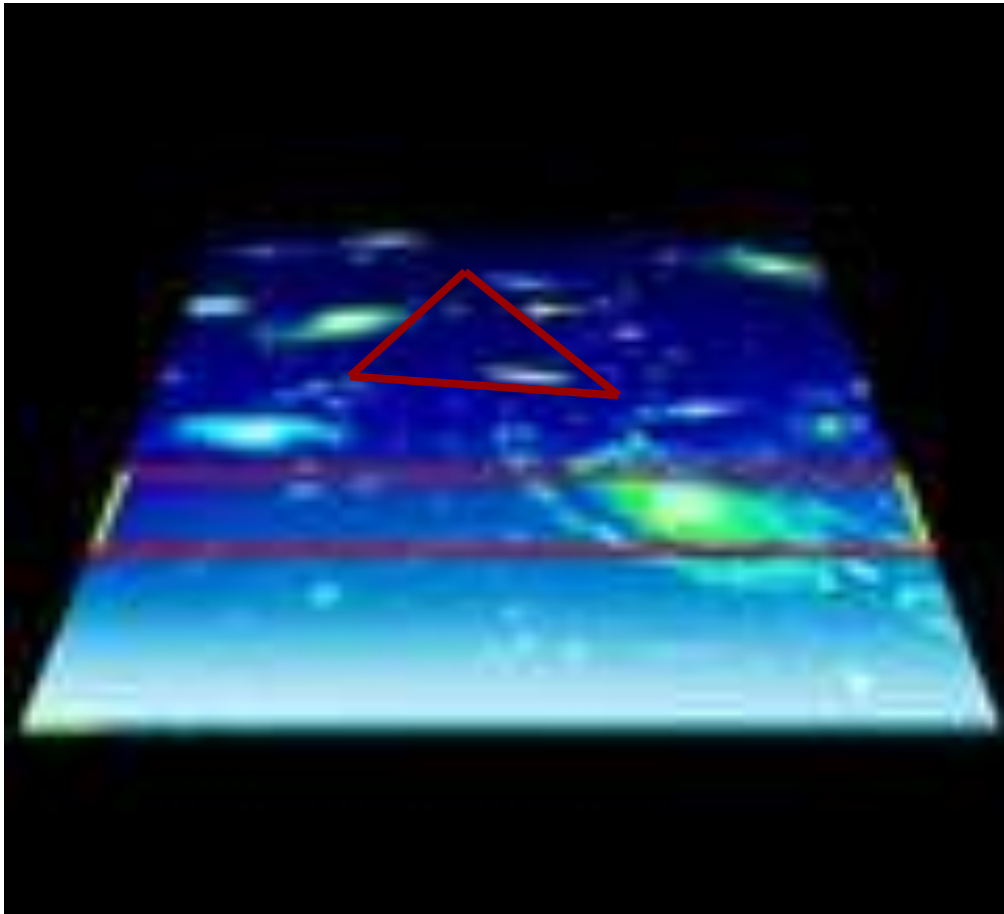
Przestrzeń i czas dotąd uważane za pasywną scenę zdarzeń w istocie tworzą czasoprzestrzeń, która jest dynamicznym uczestnikiem wszystkich procesów.



Geometria Wszechświata

• Geometria płaska

model: dwuwymiarowa
płaszczyzna

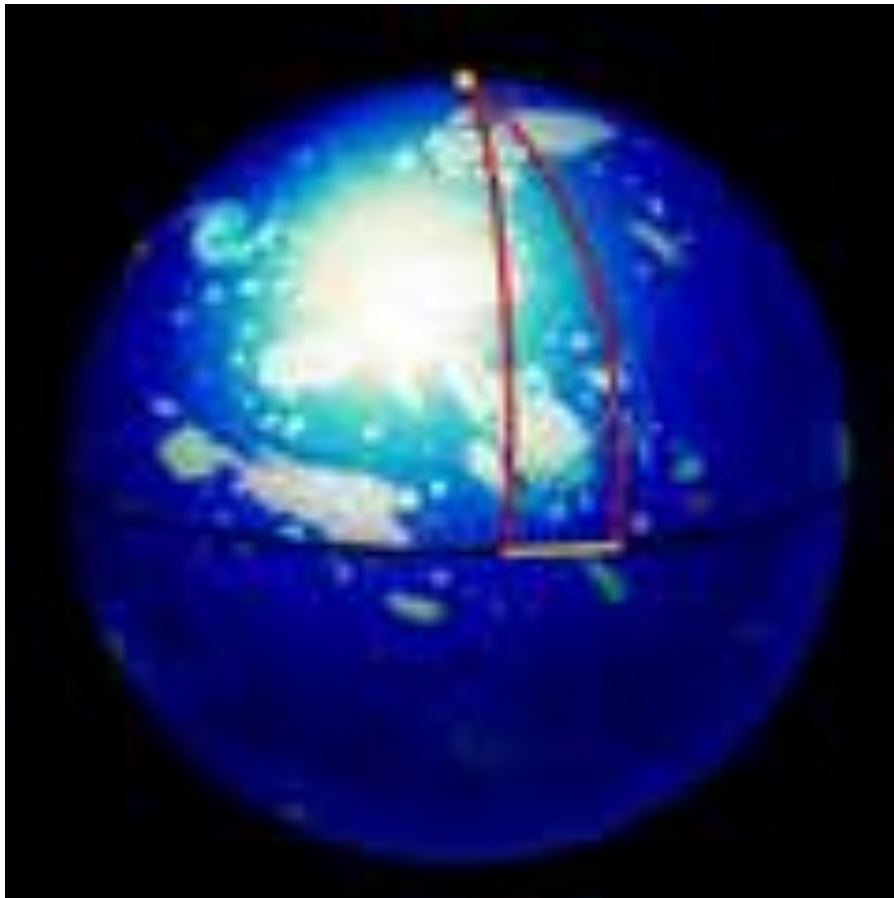


Suma kątów w trójkącie
równa jest 180°

Linie równoległe nie
przecinają się

Geometria Wszechświata

• Geometria sferyczna



model: powierzchnia kuli -
krzywizna dodatnia

Suma kątów w trójkącie jest
większa niż 180°

Linie równoległe przecinają się
(przykład: południki)

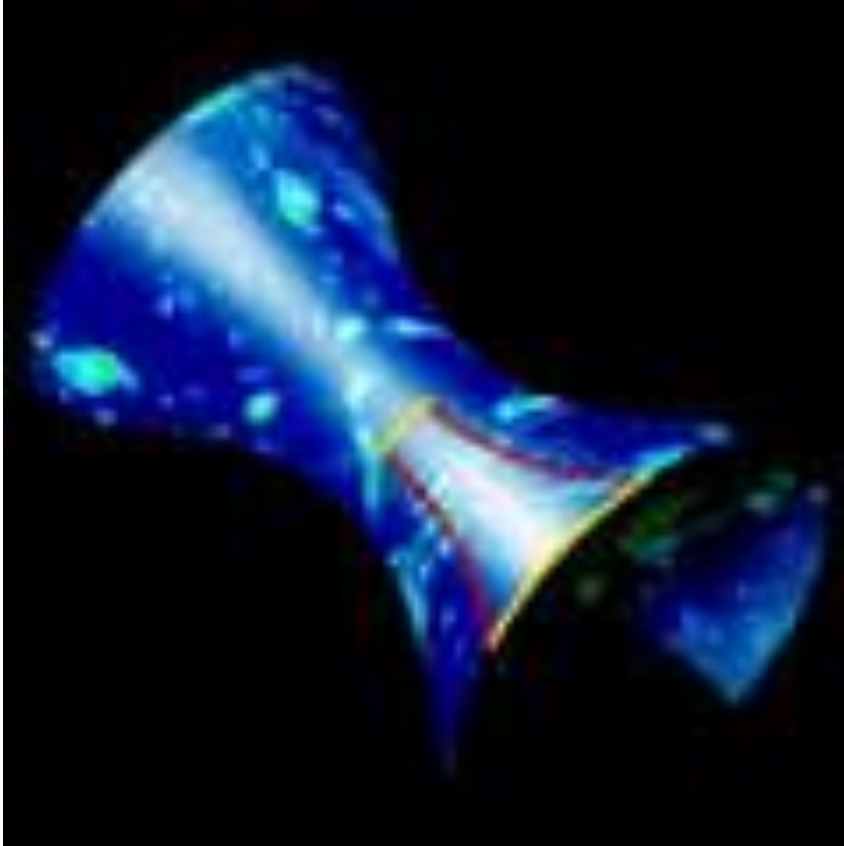
Geometria Wszechświata

• Geometria hiperboliczna

model: powierzchnia siodłowa-
krzywizna ujemna

Suma kątów w trójkącie jest
mniejsza niż 180°

Linie równoległe rozchodzą się





Zjazd Fizyków, PW, 2005



Dr. Stanisław Bajtlik demonstruje powierzchnię o krzywiznie ujemnej
... i dodatniej

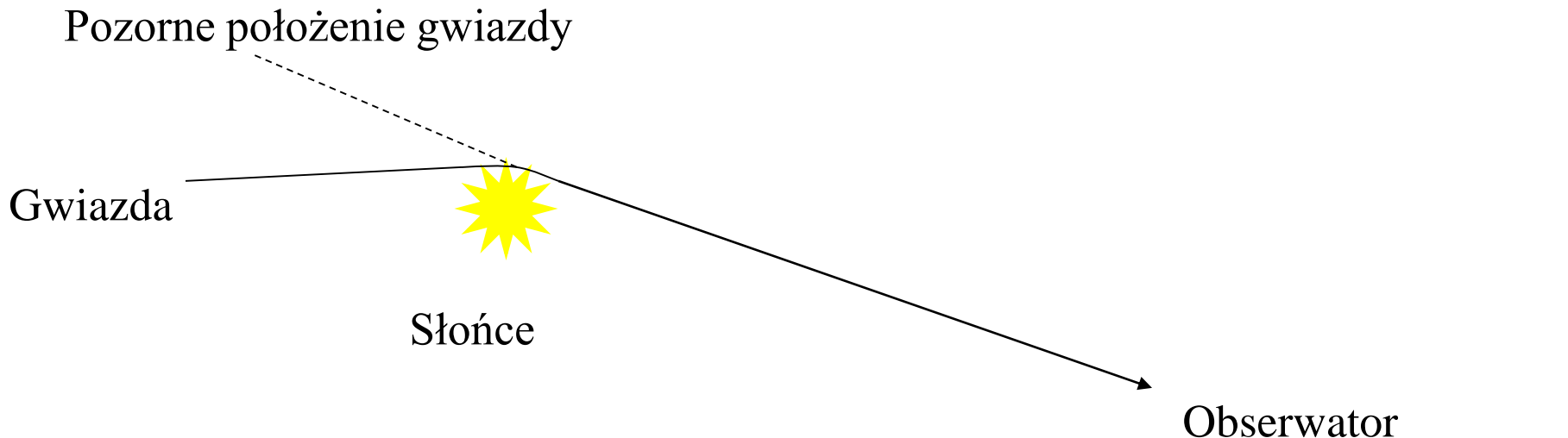




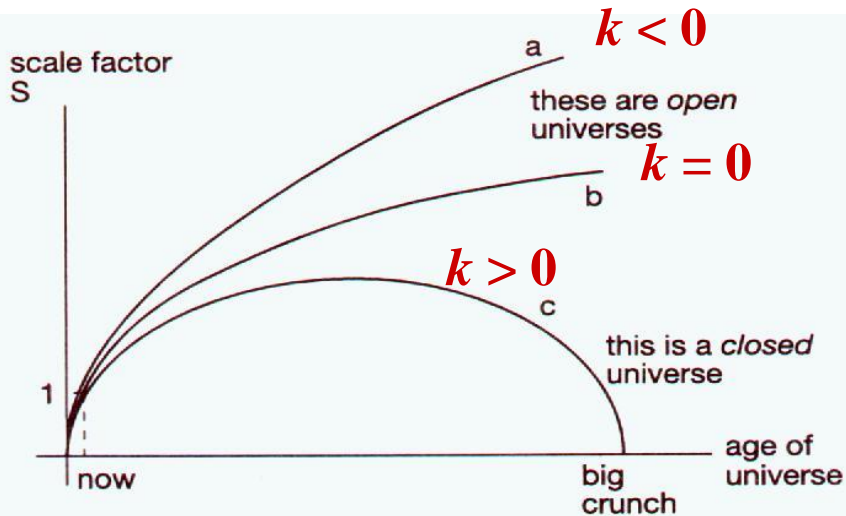
Zakrzywienie czasoprzestrzeni oznacza, że najkrótszą linią łącząca dwa punkty jest linia krzywa – światło w pobliżu dużej masy nie porusza się po prostej!

Doświadczalne potwierdzenie Ogólnej Teorii Względności:

W 1919 r. zaobserwowano w czasie zaćmienia Słońca ugięcie promieni świetlnych biegnących od odległej gwiazdy.



Geometria Wszechświata



Wielkość k opisuje krzywiznę Wszechświata

Krzywizna	Geometria	Suma kątów w trójkącie	Los Wszechświata
$k > 0$	sferyczna	$> 180^\circ$	Wielki Kolaps
$k = 0$	płaska	$= 180^\circ$	Wieczna ekspansja
$k < 0$	hiperboliczna	$< 180^\circ$	Wieczna ekspansja

Krzywizna zależy od gęstości Wszechświata

Gęstość krytyczna ρ_k – odpowiada wartości $k = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_k}{3}$$



$$\rho_k = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Równanie Friedmana
postaci:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

można przekształcić do

$$\rho - \rho_k = \frac{3kc^2}{8\pi G a^2}$$

Jeśli $\rho > \rho_k$, to $k > 0$,

Jeśli $\rho < \rho_k$, to $k < 0$,

$\Omega = \rho / \rho_k$ - parametr gęstości

Miara płaskości Wszechświata:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho - \rho_k}{\rho} = \frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2 \rho}$$

Gdy dominuje promieniowanie:

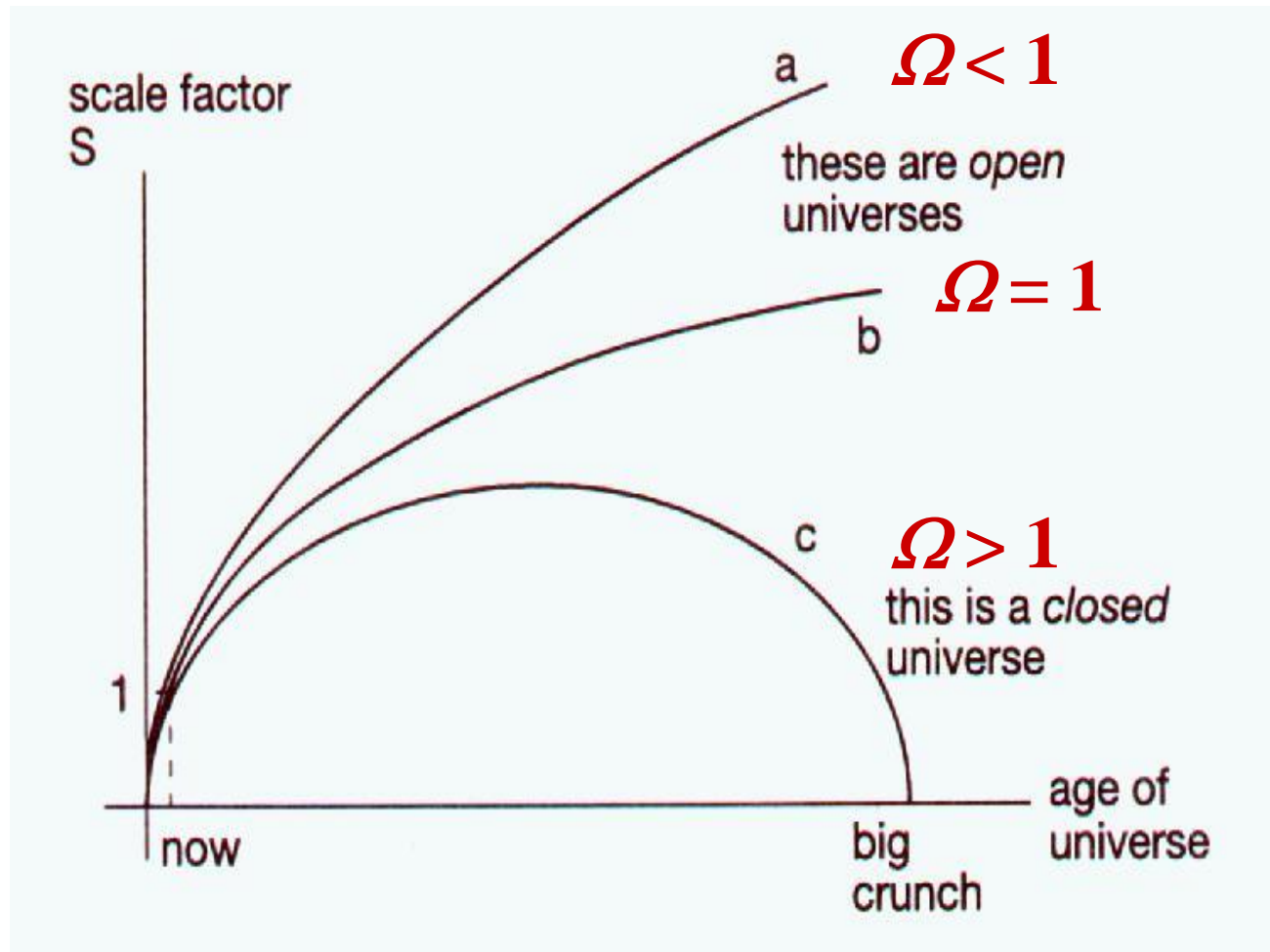
$$\rho \propto \frac{1}{a^4}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \propto a^2 \propto t$$

Wartość $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Omega - 1}{\Omega}$ rośnie w czasie

Wszechświat z czasem robi się coraz mniej płaski.

$\Omega = \rho / \rho_k$ - ten parametr wyznacza przyszłość Wszechświata



Jeśli wyznaczymy Ω , odkryjemy przyszłość Wszechświata



Geometria Wszechświata

Czy nasze istnienie byłoby możliwe we
Wszechświecie o dowolnej wartości Ω ?

$\Omega \ll 1$ gęstość Wszechświata zbyt mała, aby powstrzymać ekspansję.
Materia rozproszyłaby się, zanim mogłyby powstać gwiazdy i planety.

$\Omega \gg 1$ gęstość Wszechświata tak duża, że ekspansja po krótkim czasie
zatrzymałaby się i na skutek kolapsu Wszechświat zakończyłby żywot. I w tym
przypadku nie zdążyłyby powstać gwiazdy i planety.

Zasada antropiczna

Koncepcja filozoficzna, zgodnie z którą fundamentalne stałe fizyczne mają
dokładnie takie wartości, aby umożliwić powstanie życia.

Ciekawy wykład prof. dr hab. Zbigniewa Jacyny-Onyszkiewicza:

http://www.staff.amu.edu.pl/~zbigonys/wszechswiat_na_miare.html



Przez tysiące lat ludzie wierzyli, że Wszechświat jest statyczny.

Einstein dodał do równania stałą kosmologiczną Λ , aby „ratować” płaski i statyczny Wszechświat.

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

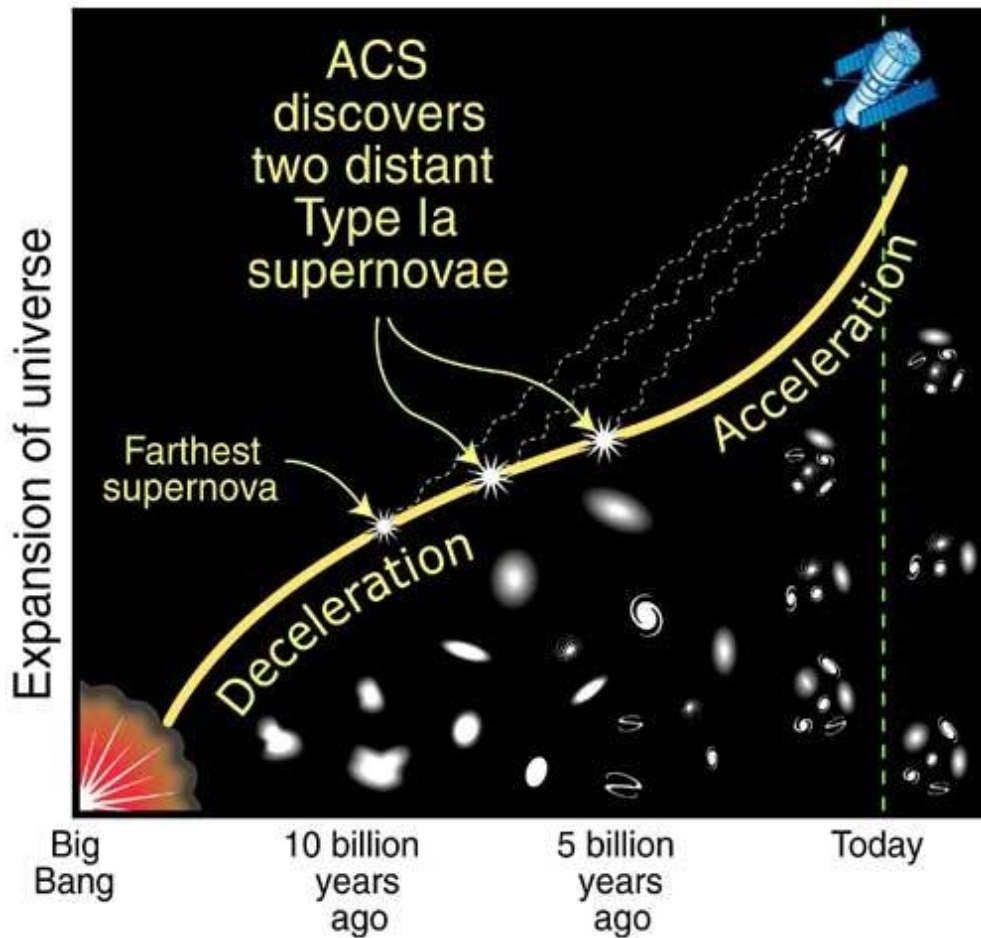
Λ - reprezentuje siłę odpychającą, równoważącą przyciąganie grawitacyjne – dzięki niej pojawia się rozwiązanie równania opisujące statyczny Wszechświat.

W 1922 r. Aleksander Friedman znalazł wszystkie rozwiązania równania i wykazał, że nawet dodanie stałej kosmologicznej nie zapewni stałości Wszechświata.

Einstein nazwał dodanie stałej kosmologicznej swoją największą pomyłką, jednak obecnie wcale nie jest oczywiste, że wynosi ona zero!



Ekspansja Wszechświata przyspiesza!



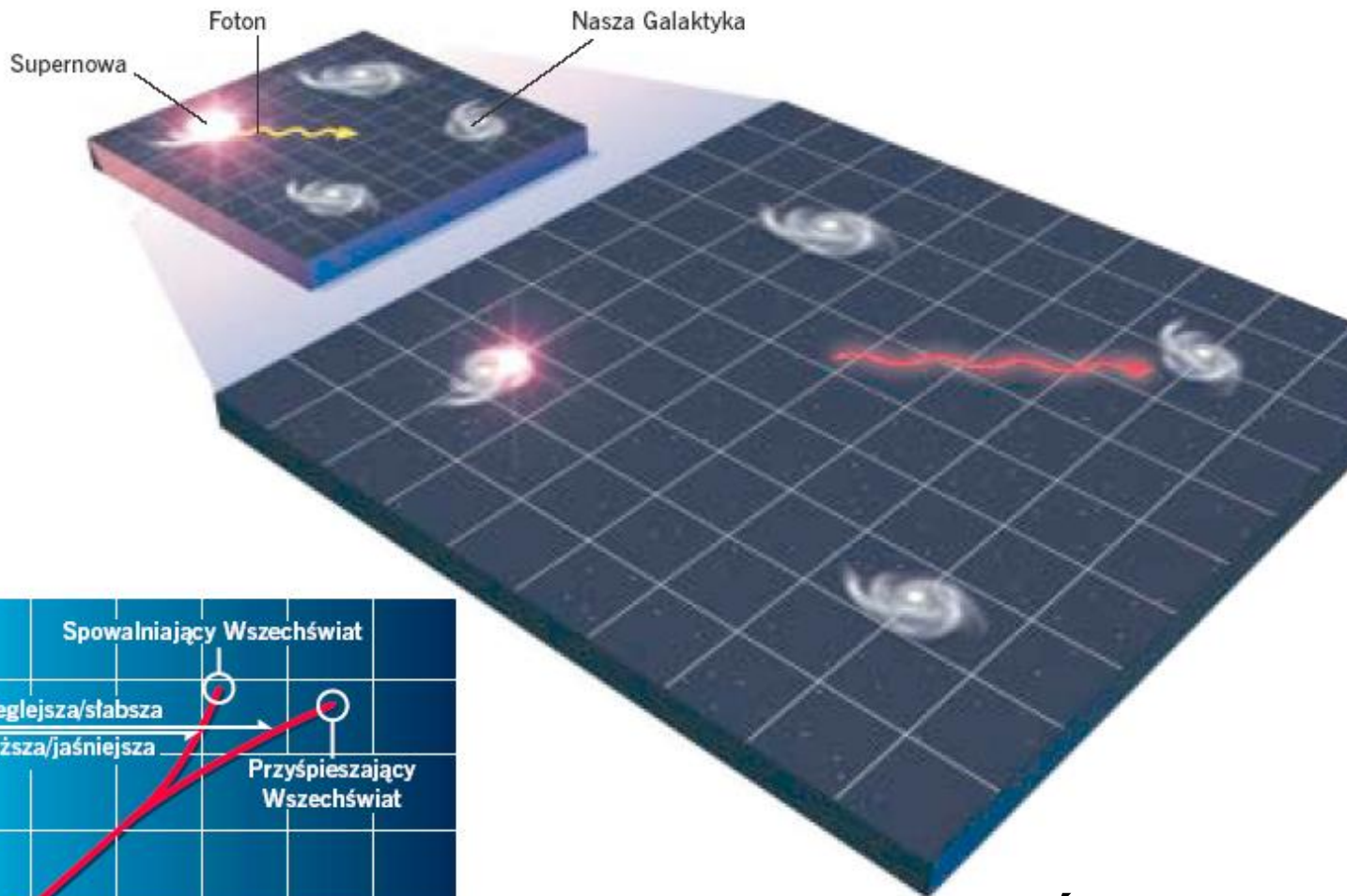
Obserwacje supernowych znajdujących się w odległości 3/4 drogi od krańca Wszechświata udowodniły, że Wszechświat rozszerzał się w różnym tempie podczas swojej historii.

Saul Perlmutter
Brian P. Schmidt
Adam G. Riess



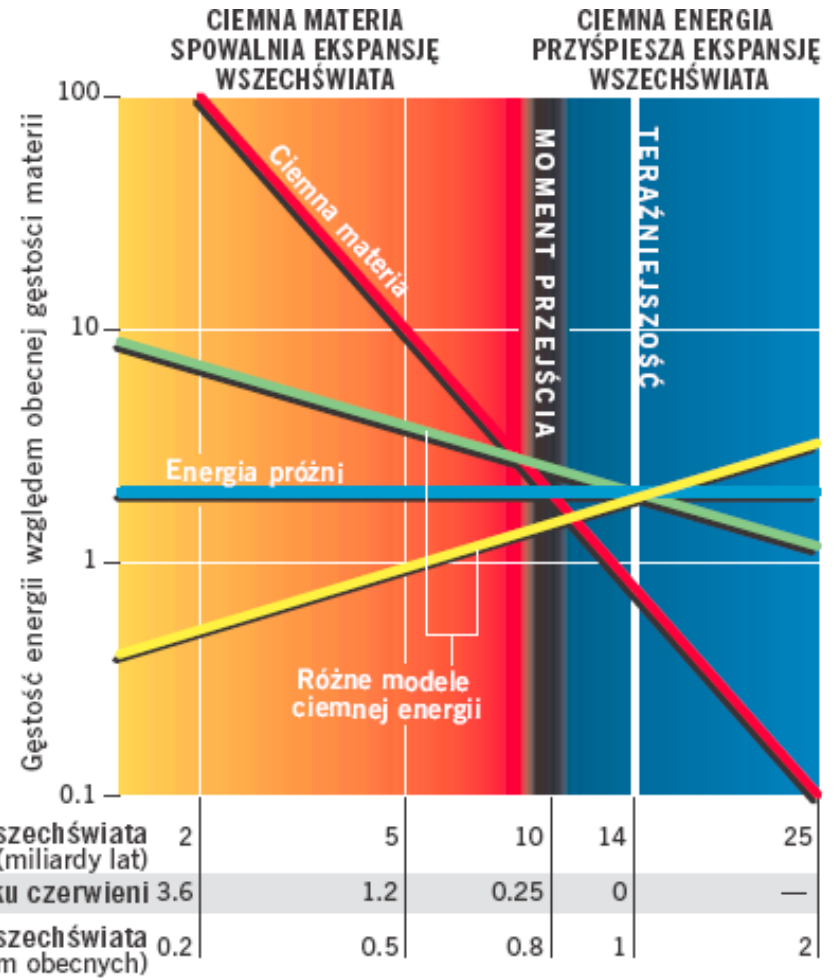
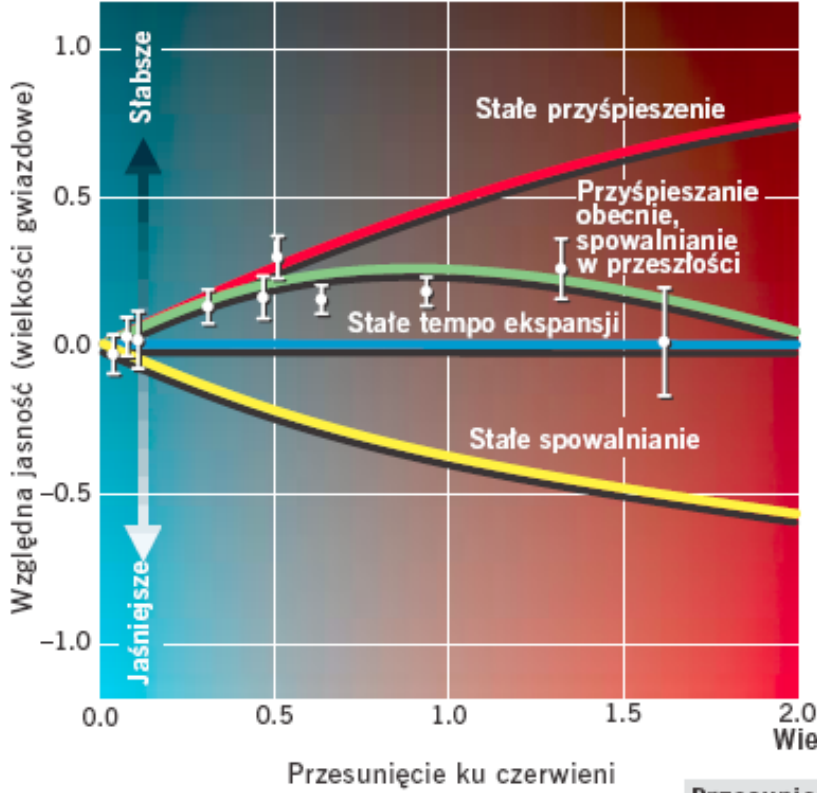
2011

W przyśpieszającym Wszechświecie galaktyka o danej prędkości będzie znajdować się dalej, niż oczekujemy (a co za tym idzie – będzie mniej jasna).



ŚN 3 - 2004

jasność



ŚN 3 - 2004

Poznamy dzieje Wszechświata, jeśli wyznamy trzy parametry:

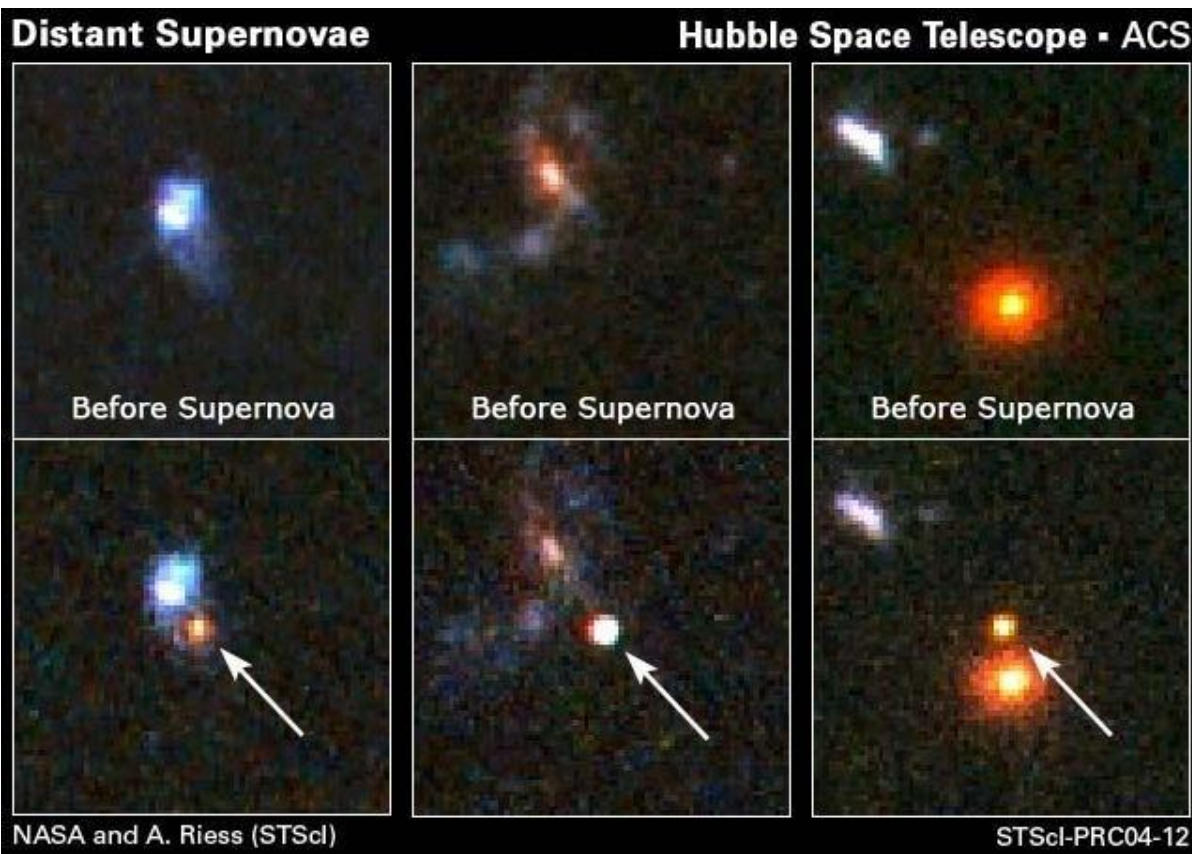
$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_k}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3 \cdot H^2}$$

$$H = \frac{v}{r}$$

Pomiar stałej Hubble'a

Supernowe typu 1A stanowią doskonałe obiekty do pomiaru odległości galaktyk – „świece standardowe”



Znamy dokładnie ich jasność absolutną.

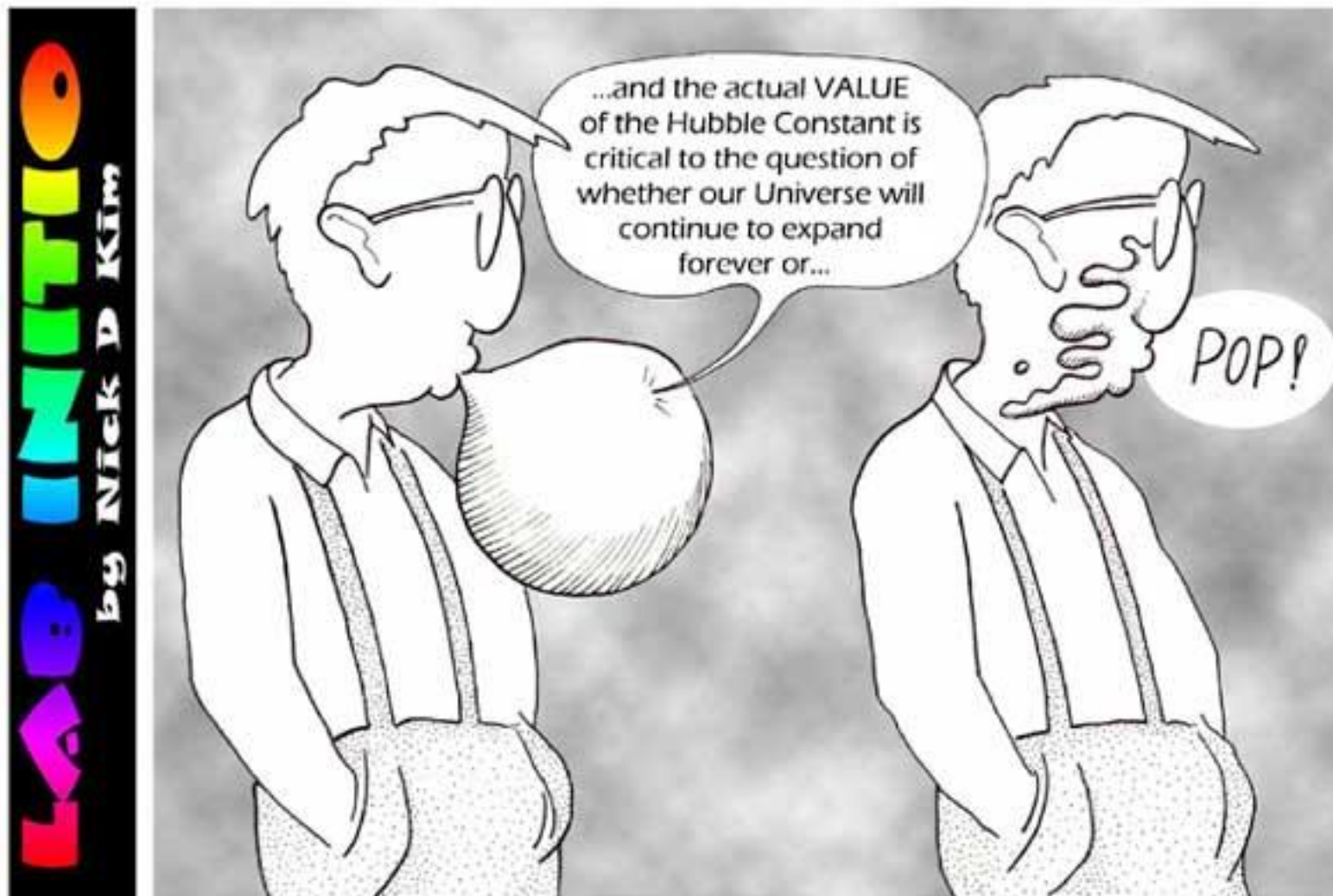
Jasność obserwowana wyznacza odległość.

Prędkość ucieczki galaktyk wyznaczona z obserwowanego przesunięcia linii widmowych ku czerwieni.

Obecna wartość stałej Hubble'a:

$$H = 71^{+4}_{-3} \frac{km}{(s \cdot MPc)}$$

Stała Hubble'a





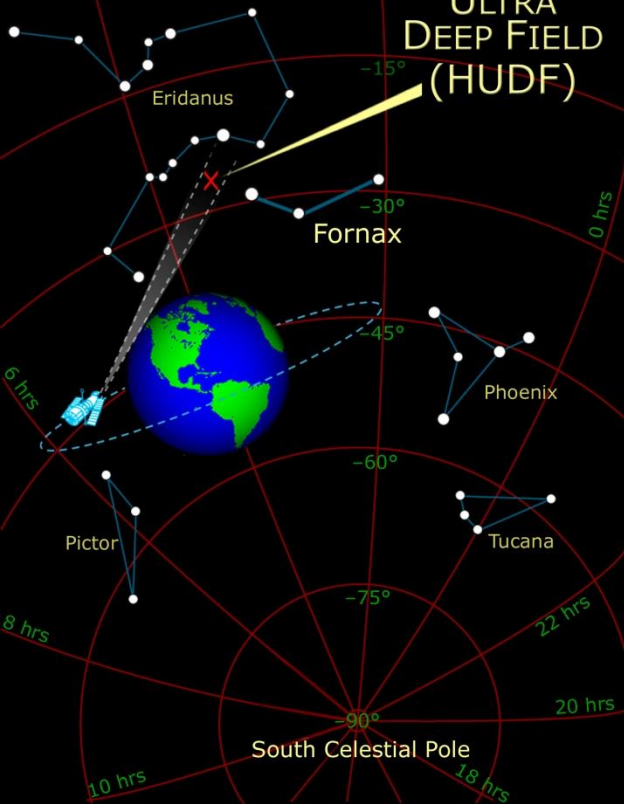
Pomiar gęstości materii Wszechświata

Od gęstości zależy krzywizna Wszechświata

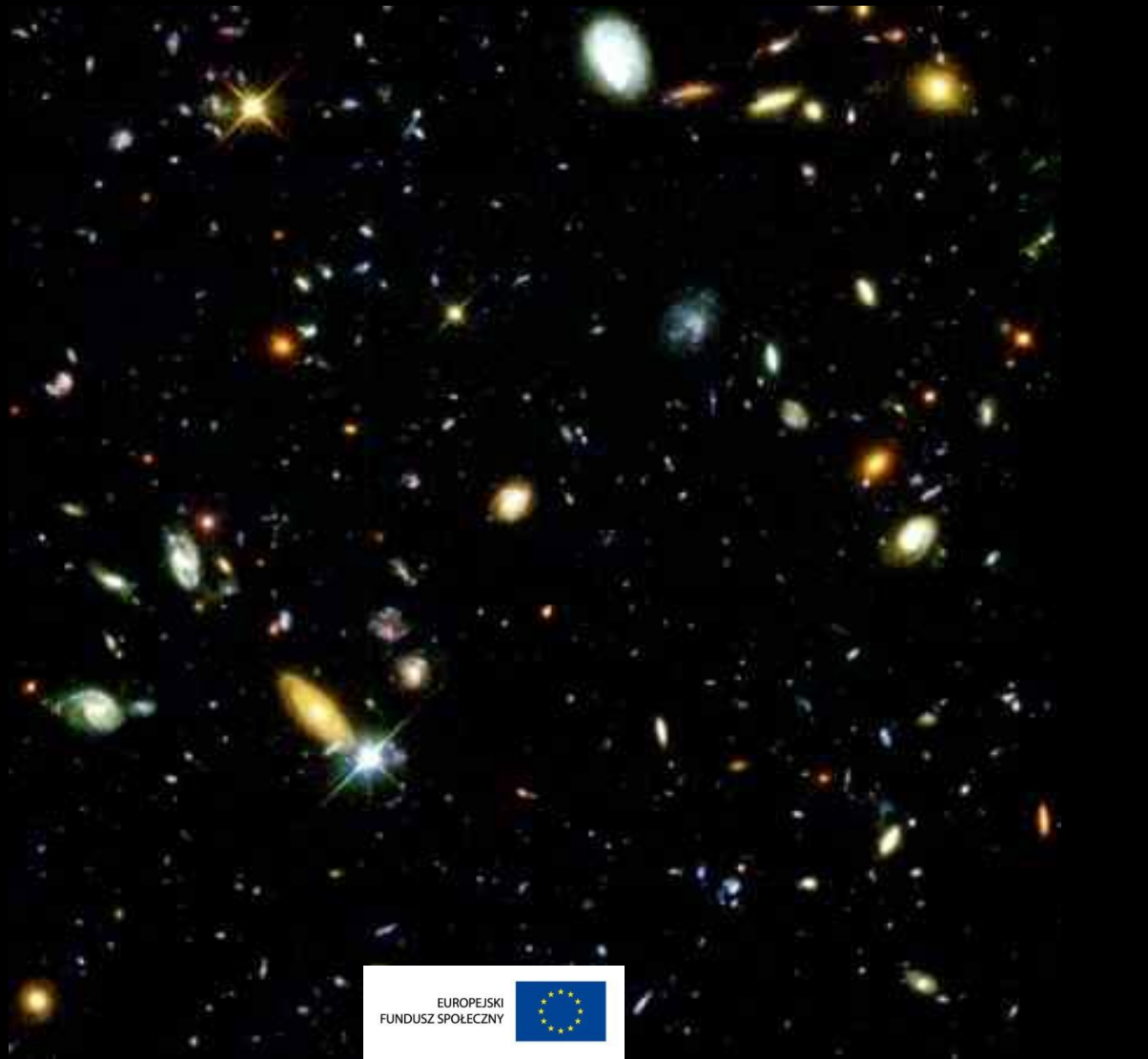
- Pomiar promieniowania świecących gwiazd i materii międzygwiazdowej – **materia świetlista**

$$\Omega_{lum} \approx 0,005$$





$$\Omega_{lum} \sim 0.005$$





Pomiar gęstości materii Wszechświata

Od gęstości zależy krzywizna Wszechświata

- Pomiar zawartości lekkich pierwiastków powstałych w pierwszych 3 minutach po Wielkim Wybuchu - **materia barionowa**

$$\Omega_b \approx 0,04$$

- Pomiar oddziaływań grawitacyjnych – rotacja galaktyk - **materia grawitacyjna (ciemna materia)**

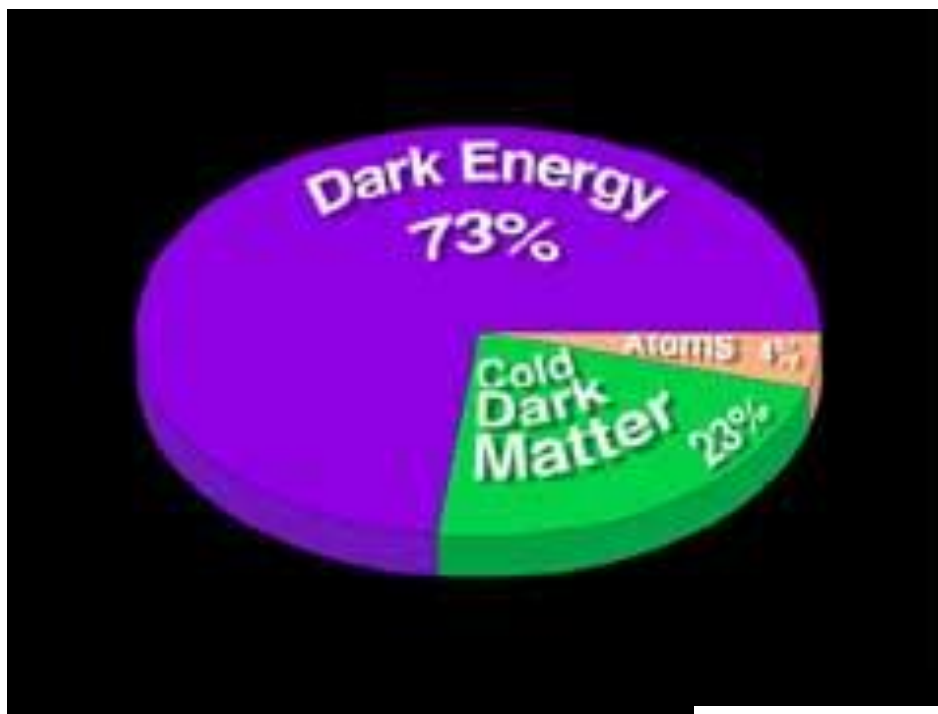
$$\Omega_{dm} \approx 0,3$$



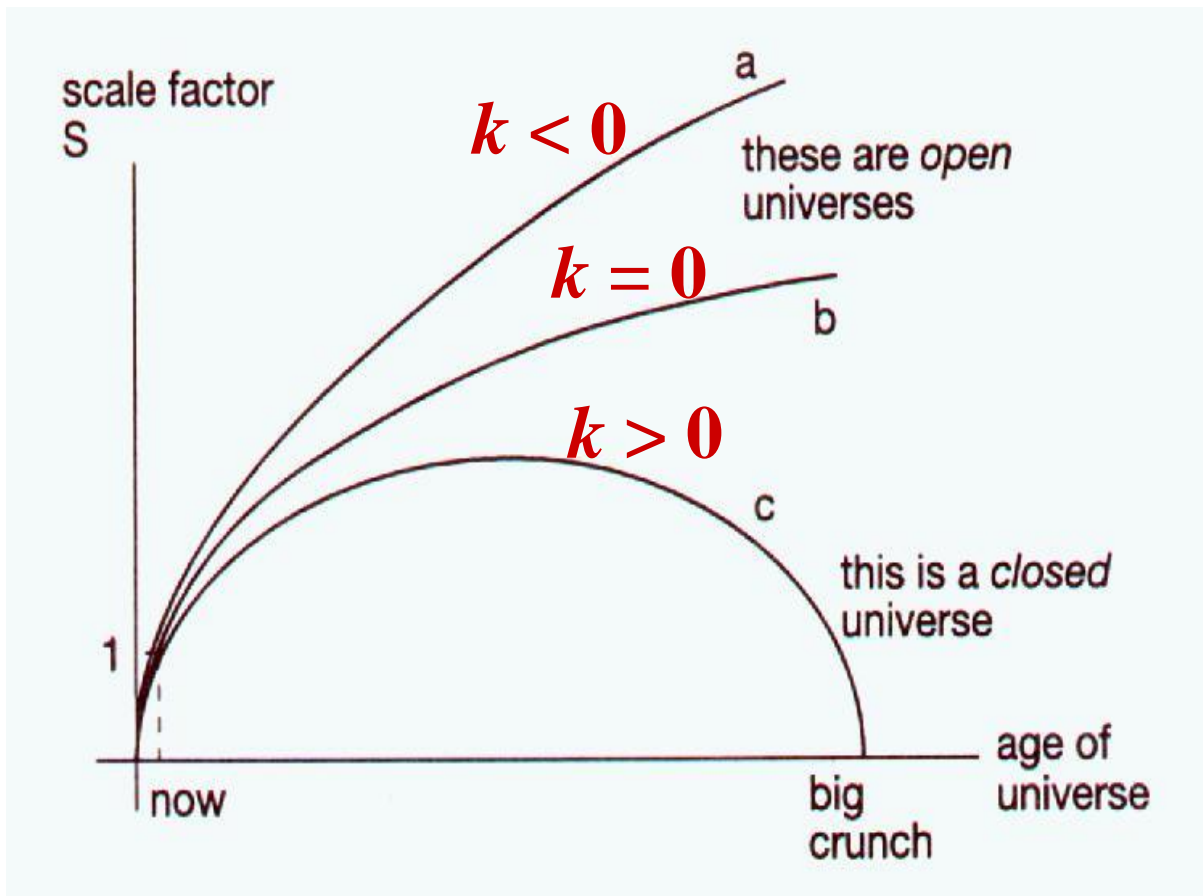
Wszechświat jest płaski!

Wynik badania promieniowania relikтового (2003):

$$\Omega_{tot} = 1,02 \pm 0,02$$



Los Wszechświata



$$U > 0$$

$$U = 0$$

$$U < 0$$

$$k = -\frac{2U}{mc^2 x^2}$$

$$U = E_k + E_p$$

$\rightarrow 0$ $\leftarrow 0$