POLE MAGNETYCZNE: PRAWO GAUSSA, B-S

TRANSFORMACJE RELATYWIST. POLA E-M

STACJONARNE RÓWNANIA MAXWELLA

Wprowadzenie

- **Pole magnetyczne**, jedna z postaci *pola elmg*: wytwarzane przez zmiany pola elektrycznego w czasie, lub przez układ poruszających się ładunków
- Pole magnetyczne działa na poruszające się ładunki (prąd elektryczny). Pole magnetyczne charakteryzują wektory: **H, B**
- Oddziaływanie pola magn. z pojedynczym ładunkiem - **siła Lorentza**
- Prąd płynący w przewodniku wytwarza pole magnetycznego - **prawo Ampère'a**
- Pole magnetyczne wytwarzane przez obwód z prądem określa prawo **Biota-Savarta**
- Pole magnetyczne (bez czasu) można opisać **równ. Maxwella (stacjonarne)**

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \text{ i } \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$$

Właściwości pola magnetycznego

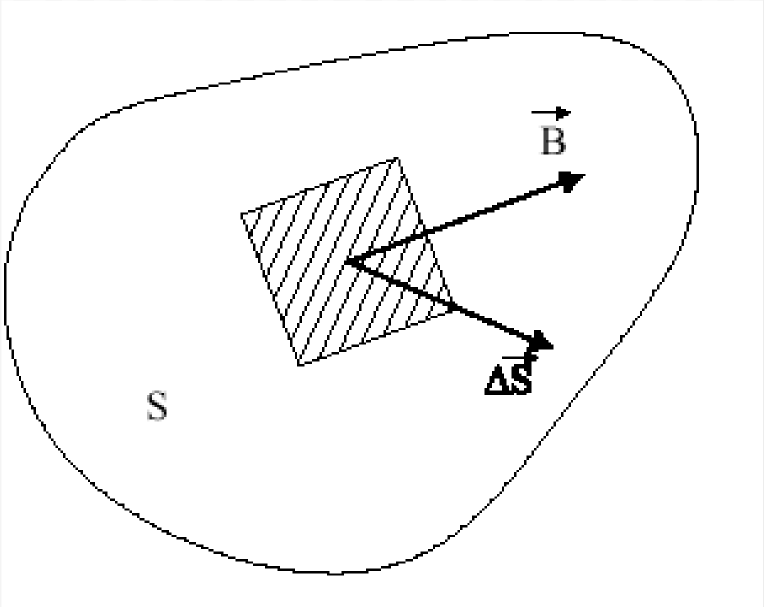
- Pole magnetyczne nie jest polem zachowawczym, ponieważ cyrkulacja $\vec{B}$ wektora po konturze zamkniętym jest różna od zera
- Pole magnetyczne jest polem wirowym.

Strumień magnetyczny

- Def.:**Strumień magnetyczny**, strumień Φ wektora natężenia pola magnetycznego **H** lub indukcji magnetycznej **B** , przenikający przez powierzchnię S, określony odpowiednio wzorami:

$$\Phi_H = \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



gdzie **n** - wersor normalny

do powierzchni S

Strumień magnetyczny

- Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest weber, w układzie CGS makswel.

$$[\Phi_B] = \mathrm{Wb} = \mathrm{T \cdot m^2} = \mathrm{N \cdot m/A} = \mathrm{V \cdot s}$$

Gdy:

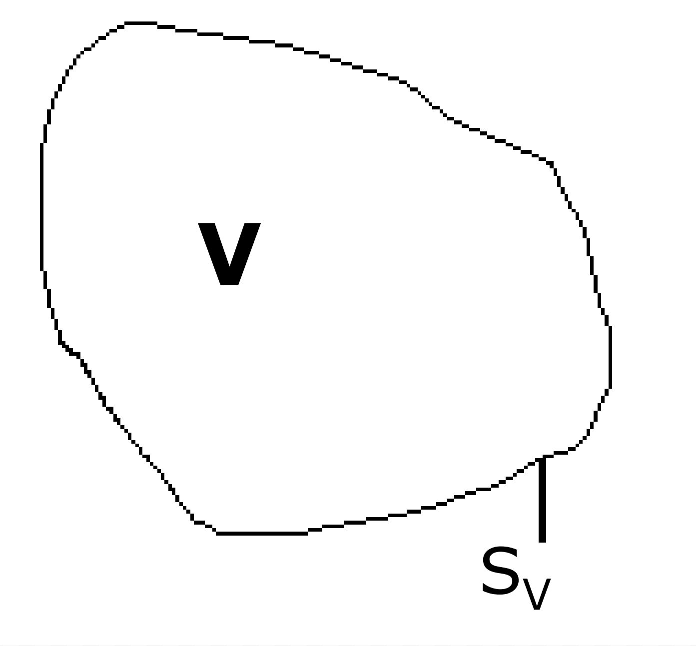
$\vec{B} \parallel d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \Phi_B$ ma wartość maksymalną

$$\vec{B} \perp d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = 0$$

Strumień magnetyczny $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

- **Prawo Gaussa**: Strumień magnetyczny przez dowolną zamkniętą powierzchnię równa się zeru.

$$\oint_{S_V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



Postać różniczkowa prawa Gaussa

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V div\,\vec{B} \cdot dV$$

- Zmieniamy całkę powierzchniową na objętościową

$$\int_V divB \cdot dV = 0$$

- Ten warunek jest słuszny dla każdej objętości w przypadku gdy funkcja podcałkowa jest w każdym punkcie pola równa zeru. A więc dywergencja pola magnetycznego jest równa **zeru**, (jest to jedno z równań Maxwella)

$$\boxed{div\vec{B} = 0}$$

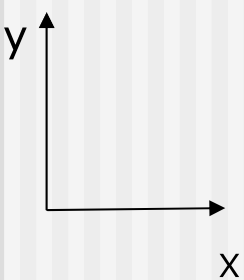
Transformacje relatywistyczne pól $\vec{B}, \vec{E}$.

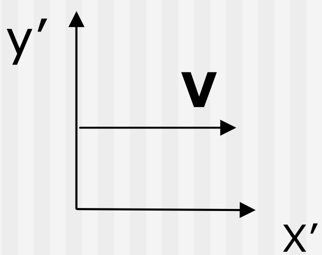
- <u>Przypadek 1:</u>
  - ✓ W układzie laboratoryjnym (x,y) nie mamy pola magnetycznego:

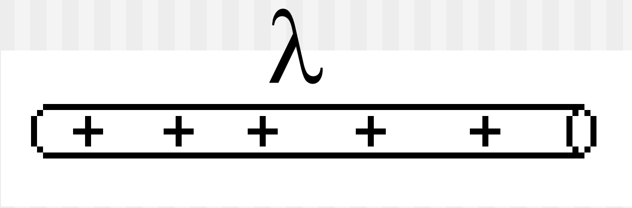
$$\vec{B} = 0 \qquad (I = 0)$$

✓Istnieje pole elektryczne $\vec{E} \neq 0$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$







λ – liniowa gęstość elektronów przewodnika

Transformacje relatywistyczne pól $\vec{B}, \vec{E}$.

- Ruchomy obserwator zaobserwuje, że w przewodniku popłynie prąd (w kierunku –x), którego wartość możemy wyrazić wzorem:

$$I' = \lambda' \cdot v$$

- Wynikiem czego będzie pojawienie się pola:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\lambda' \cdot v}{y} = \mu_o \varepsilon_o v \cdot E'$$

$$gdzie: E' = \frac{\lambda'}{2\pi \varepsilon_o y}$$

Transformacje relatywistyczne pól $\vec{B}, \vec{E}.$

$$B^{'} = \varepsilon_o \mu_o v E^{'}$$

$$gdzie: \varepsilon_o \mu_o = \frac{1}{c^2}$$

- Z przekształceń otrzymujemy wzór na pole magnetyczne:

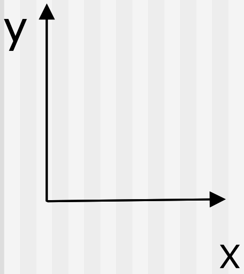
$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$

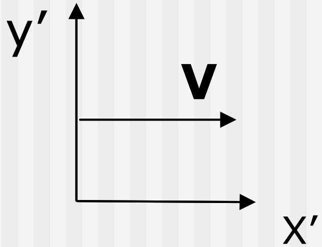
Transformacje relatywistyczne pól $\vec{B}, \vec{E}$.

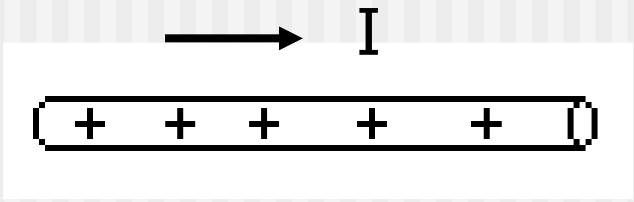
- Przypadek 2:
  - ✓ W układzie laboratoryjnym (x,y) nie mamy pola elektrycznego:

$$\vec{E} = 0 \qquad (\lambda = 0)$$

✓Istnieje pole magnetyczne $\vec{B} \neq 0 \quad (I \neq 0)$







Transformacje relatywistyczne pól $\vec{B}, \vec{E}$.

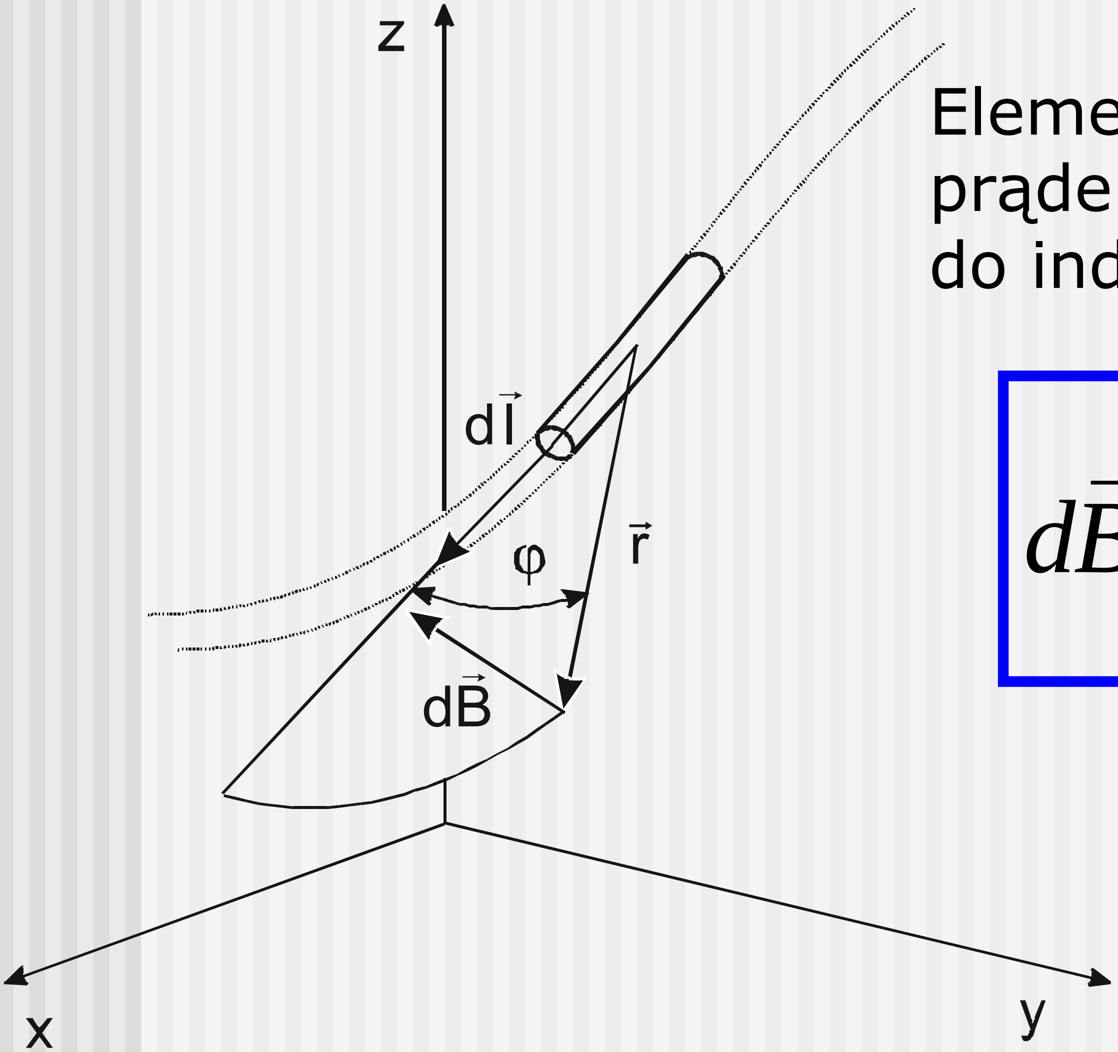
- Ruchomy obserwator zaobserwuje, że w przewodniku pojawi się pole elektryczne, którego wartość możemy wyrazić wzorem:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

Prawo Biota – Savarta

- Pozwala obliczyć ***B*** z rozkładu prądu (I = const.).
- Obliczenia są proste gdy rozkład prądów jest symetryczny.
- W innym przypadku to dzielimy prądy na nieskończenie małe elementy (rysunek)
- Stosujemy prawo Biota-Savarta obliczamy pole takich elementów, a następnie sumujemy je żeby uzyskać wypadkowy wektor ***B***

Prawo Biota – Savarta c.d.



Element przewodnika *dl* z prądem *I* daje przyczynę d**B** do indukcji magnetycznej

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Prawo Biota – Savarta c.d.

- Stosując wzór transformacyjny przejdziemy od pola elektrostatycznego do pola magnetycznego.

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Wzór opisujący pole elektrostatyczne – natężenie pola

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$

Wzór transformacyjny pól elektromagnetycznych

Prawo Biota – Savarta - wyprowadzenie wzoru

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right)$$

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_o \mu_o$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Różniczkujemy obustronnie równanie

$q \to dq$ (w el. *dl*)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot dq \cdot \frac{\frac{d\vec{l}}{dt} \times \hat{r}}{r^2}$$

Prawo Biota – Savarta - wyprowadzenie wzoru

- Wartość liczbowa ***dB*** zgodnie z prawem Biota-Savarta wynosi:

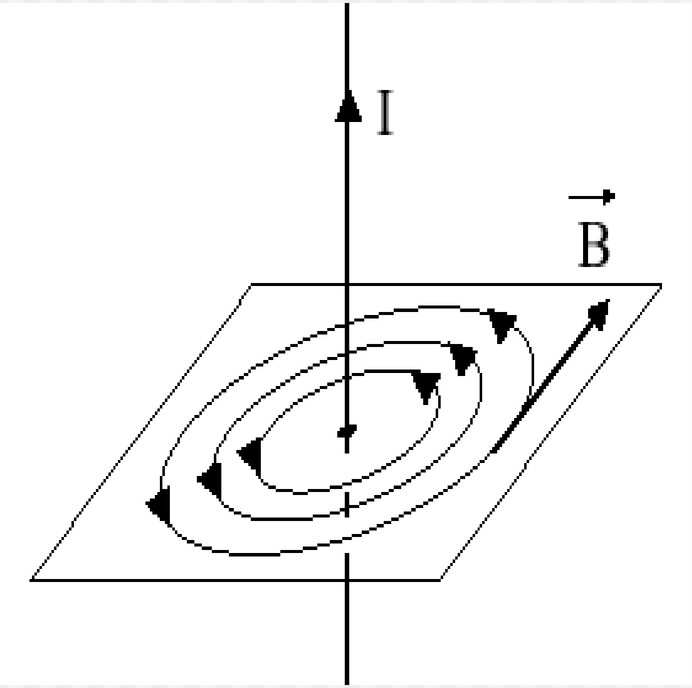
$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl \cdot \sin\varphi}{r^2}$$

- Wartość B wynosi:

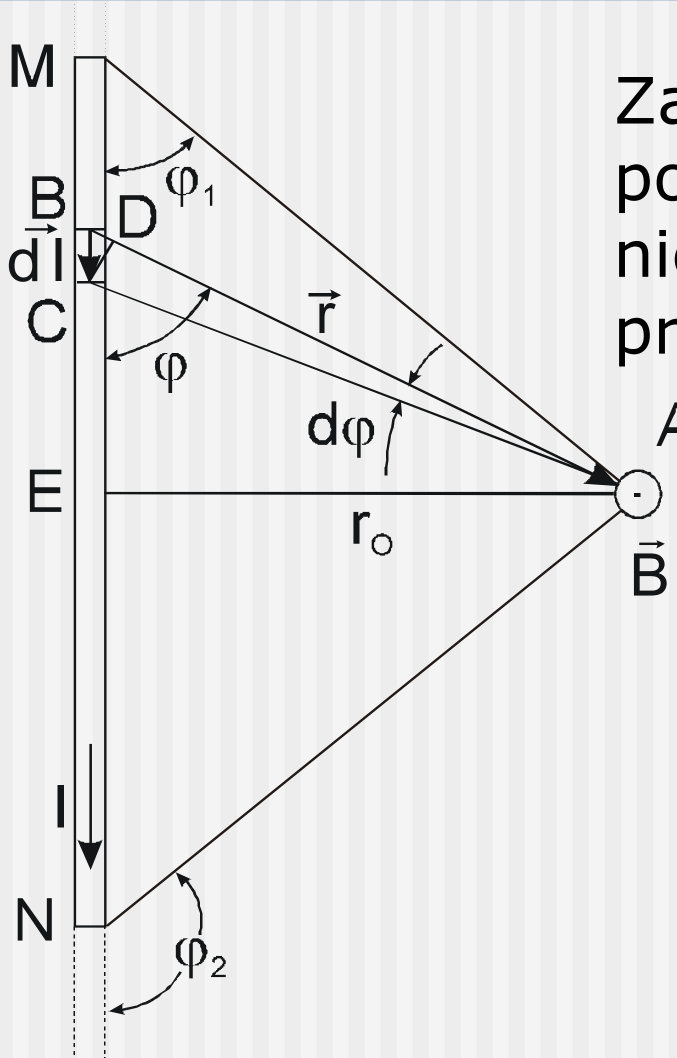
$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}$$

Prawo Biota – Savarta - wyprowadzenie wzoru

- W przypadku pola magnetycznego prostoliniowego przewodnika linie sił pola są, jak łatwo stwierdzić doświadczalnie, koncentrycznymi okręgami a ich zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej.



Przykład:
Prostoliniowy przewodnik z prądem



Zastosujmy wzór do obliczenia pola pochodzącego od nieskończenie długiego przewodnika.

$$dB = \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi} \frac{IdI \sin\phi}{r^2}$$

Przykład:
(c.d.)

$$B = \int \frac{\mu_o \mu_r I dl \sin\phi}{4\pi r^2} = \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi} I \int \frac{dl \sin\phi}{r^2}$$

$$r = \frac{r_o}{\sin\varphi} \qquad dl = \frac{CD}{\sin\varphi}$$

Podstawiamy te wartości do wzoru:

$$CD = rd\varphi \qquad dl = \frac{rd\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r_o d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Przekształcamy:

$$B = \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi r_o} I \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_o \mu_r I}{4\pi r_o}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

Przykład:
(c.d.)

- Dla wszystkich elementów nieskończenie długiego przewodnika kąt $\varphi_1=0$, a kąt $\varphi_2=\pi$.
- A więc indukcja magnetyczna wytwarzana przez prąd jest dana wzorem:

$$B = \frac{\mu_o \mu_r}{4\pi} \frac{2I}{r_o}$$

Natężenie pola magnetycznego

- **Natężenie pola magnetycznego: H** jest to wielkość wektorowa charakteryzująca pole magnetyczne.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

Gdzie:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

M to wektor namagnesowania-magnetyzacja

χ_m podatność magnetyczna ośrodków

Natężenie pola magnetycznego

- Podstawiając wyrażenie na wektor namagnesowania do równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \chi_m \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o (1 + \chi_m)}$$

- Podstawiając bezwymiarową wielkość: $\mu_r = (1 + \chi_{\mathbf{m}})$ – nazywamy względną przenikalnością magnetyczną lub przenikalnością magnetyczną.

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o \mu_r}}$$

$$[H] = \frac{A}{m}$$

Natężenie pola magnetycznego

- Wektor **H** ma ten sam kierunek i zwrot co wektor **B**, lecz $\mu_o\mu_r$ mniejszy od niego co do wartości bez względnej (w ośrodkach anizotropowych wektor **H** i **B** nie mają w ogólności takich samych kierunków).

- Mając natężenie pola magnetycznego wyznaczymy pole magnetyczne:

$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \cdot \vec{H}$$

Ze względu na właściwości magnetyczne ciała dzielimy na:

- diamagnetyki ($\mu<1$) momenty indukowane
  wszystkie ciała (szczególnie z $p_m=0$)
  np. woda $\mu_r=0,999991$

- paramagnetyki ($\mu>1$) momenty własne
  pojedyncze atomy z p_m
  np. glin $\mu_r=1,000008$

- magnetyki (np. ferromagnetyki) ($\mu>>1$) kryształy
  z budową domenową
  np. stal $\mu_r=300$ (zależy od natężenia pola)

p_m – magnetyczny moment dipolowy

Równania Maxwella dla pól stacjonarnych

$$\vec{E} \neq \vec{E}(t)$$

$$\vec{B} \neq \vec{B}(t)$$

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oiint_{S_V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_o} \qquad div\,\vec{E} = \frac{\rho_{wew}}{\varepsilon_o}$$

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oiint_{S_V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

- Potencjalność pola elektrostatycznego

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad rot\vec{E} = 0$$

- Prawo Ampere'a

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{wew} \qquad rot\vec{B} = \mu_o \vec{j}$$