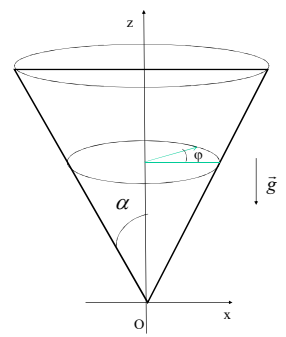


V

Zadanie 1. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości po powierzchni bocznej stożka, zwróconego wierzchołkiem w dół. Wiadomo, iż kąt między osią symetrii stożka Oz a tworzącą stożka wynosi α . Stożek znajduje się w polu siły ciężkości działającej pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Znaleźć funkcję Hamiltona i napisać równania (kanoniczne) Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Czy można znaleźć współzrzedną uogólnioną dla której pęd uogólniony związany z tą współzrzedną jest stałą ruchu?

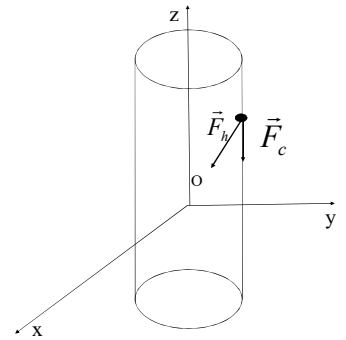


Zadanie 2. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni kuli o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Na ciało działają jednocześnie siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego, k -znana dodatnia stała.

- 1) Znaleźć funkcje Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Zapisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

Zadanie 3. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni walca o równaniu $x^2 + y^2 = R^2$ pod działaniem siły proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współzrzednych $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ ($k > 0$) oraz siły ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$.

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Napisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?



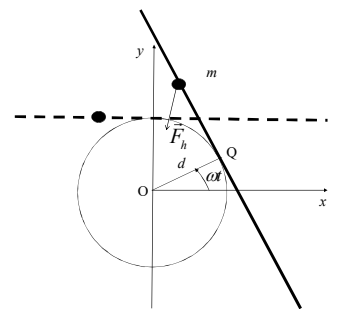
Zadanie 4. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej, drgającej powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca równy w chwili początkowej ρ_0 zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

$$\rho(t) = \rho_0 + A \sin(\omega t) \quad (\rho_0, A, \omega = \text{const})$$

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
- 2) Napisać równania Hamiltona. Który z pędów uogólnionych jest stałą ruchu?

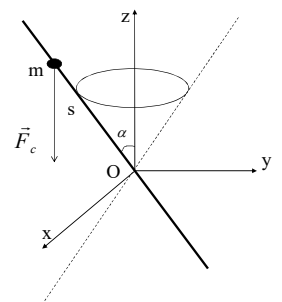
Odp. (częściowa)
$$H = \frac{p_\phi^2}{2m(\rho_0 + A \sin(\omega t))^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + mgz$$

Zadanie 5. W płaszczyźnie poziomej leży gładka prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współzrzednych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współzrzednych wynosi d , przy czym w chwili początkowej $t=0$ prosta była położona równolegle do osi Oy . Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła skierowana w kierunku początku układu współzrzednych o wartości proporcjonalnej do odległości ciała od początku układu współzrzednych $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ (k -znana dodatnia stała). Nie uwzględniamy wpływu siły ciężkości na ruch ciała. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?



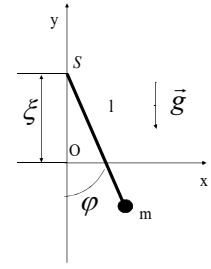
Wsk. Jako współzrzedną uogólnioną można przyjąć s -współzrzedną określającą aktualne położenie ciała względem punktu Q leżącego na prostej, po której odbywa się ruch.

Zadanie 6. Prosta przechodząca przez początek układu współzrzednych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia punkt materialny o masie m . Na punkt działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $F_c = (0, 0, -mg)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równanie ruchu Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Można przyjąć, iż w chwili początkowej ruchu prosta leżała w płaszczyźnie $y=0$.



Zadanie 7.

- 1) Znaleźć funkcje Hamiltona opisującą wahadło matematyczne o długości l i masie m poruszające się pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahała porusza się po prostej pionowej w taki sposób, iż jego położenie na osi pionowej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2}At^2$ (A -stała). Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahała od pionu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .



- 2) Zapisać równanie Hamiltona.

Odp. (częściowa)
$$H(\varphi, p_\varphi, t) = \frac{ml^2}{2} \left[\frac{p_\varphi}{ml^2} - \frac{A \sin(\varphi)t}{l} \right]^2 - \frac{m}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{2} mgAt^2 - mgl \cos(\varphi)$$

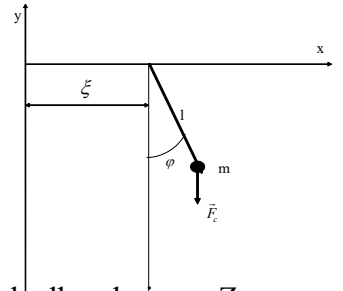
Zadanie 8.

- 1) Znaleźć funkcje Hamiltona opisującą wahadło matematyczne o długości l i masie m poruszające się pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahała porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

a) $\xi = A \sin(\Omega t)$ (A, Ω -stałe) b) $\xi = \frac{1}{2}At^2$ (A -stała).

Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahała od pionu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

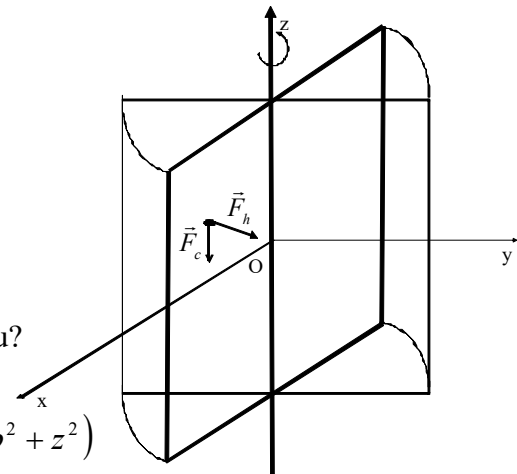
- 2) Zapisać równanie Hamiltona.



Zadanie 9. Pionowo ustawiona, gładka płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz , która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Wiadomo, iż w chwili $t=0$ oś Ox leżała na obracającej się płaszczyźnie. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie g -wartość przyspieszenia ziemskiego, k -znana dodatnia stała.

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
2) Zapisać równania Hamiltona.

Odp. (częściowa)
$$H(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 + mgz + \frac{k}{2} (\rho^2 + z^2)$$



Zadanie 10. Elektron o ładunku $e < 0$ i masie m porusza się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego opisanego potencjałem wektorowym $\vec{A} = [-By, 0, 0]$ oraz skalarnym $\varphi = 0$ gdzie B -stała, y -ykowa składowa wektora wodzącego elektronu.

- Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego \vec{B} .
- Znaleźć funkcje Lagrange'a, pędy uogólnione oraz funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Które z pędów uogólnionych są stałymi (całkami) ruchu?
- Pokazać, iż w przypadku gdy ruch elektronu jest ograniczony do płaszczyzny $z=0$ to funkcje Hamiltona można przedstawić jak dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego:

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_k)^2 \quad \text{gdzie } \omega_c = \frac{|e|B}{m}, \quad y_k \text{-stała.}$$

Zadanie 11. Elektron o ładunku $e < 0$ i masie m porusza się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego opisanego potencjałem wektorowym $\vec{A} = [0, 0, By]$ oraz skalarnym $\varphi = 0$ gdzie B -stała, y -ykowa składowa wektora wodzącego elektronu.

- 1) Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego \vec{B} .

- 2) Znaleźć funkcje Lagrange'a przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie kartezjańskim.
- 3) Znaleźć pędy uogólnione oraz funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Które z pędów uogólnionych są stałymi (całkami) ruchu?
- 4) Pokazać, iż w przypadku gdy ruch elektronu jest ograniczony do płaszczyzny $x=0$ to funkcje Hamiltona można przedstawić jak dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego:

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_k)^2 \quad \text{gdzie } \omega_c = \frac{|e|B}{m}, \quad y_k - \text{stała.}$$

Zadanie 12. Cząstka, na ruch której nie nałożono żadnych więzów jest opisywana funkcją Hamiltona o postaci: $H(x, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - Fx$ gdzie: F -stała, m -masa cząstki,

p_x, p_y, p_z są pędami uogólnionymi kanonicznie sprzężonymi ze współrzędnymi uogólnionymi x, y, z odpowiednio będącymi składowymi wektora wodzącego cząstki w układzie kartezjańskim.

- a) Określić nawias Poissona (L_x, H) gdzie L_x -rzut momentu pędu cząstki na oś Ox . Czy wielkość L_x jest stałą ruchu?
- b) Określić nawias Poissona (L_y, H) gdzie L_y -rzut momentu pędu cząstki na oś Ox . Czy wielkość L_y jest stałą ruchu?

Zadanie 13. Wykorzystując poniższe relacje zapisane z wykorzystaniem nawiasów Poissona

$$(q_j, p_n) = \delta_{jn}, \quad (q_j, q_n) = 0, \quad (p_j, p_n) = 0, \quad \delta_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } j = n \\ 0 & \text{gdy } j \neq n \end{cases}, \quad j, n = 1, 2, 3; \quad (1=x, 2=y, 3=z)$$

gdzie q_l oraz p_l oznaczają sprzężone kanonicznie ze sobą współrzędne i pędy uogólnione, pokazać, że przy potraktowaniu składowych wektora wodzącego cząstki za współrzędne uogólnione a odpowiednich składowych wektora pędu tej cząstki za pędy uogólnione, zachodzą poniższe relacje zapisane przy wykorzystaniu nawiasów Poissona:

$$\text{a) } (x, L_y) = z \qquad \text{b) } (p_x, L_z) = -p_y$$

gdzie L_y oznacza y -kową składową wektora momentu pędu tej cząstki w układzie kartezjańskim, zaś L_z oznacza z -ową składową wektora momentu pędu tej cząstki w układzie kartezjańskim.

Zadanie 14. Wykorzystując definicje nawiasu Poissona pokazać, że prawdziwe są poniższe relacje zapisane dla nawiasów Poissona:

$$\text{a) } (AB, C) = A(B, C) + (A, C)B \qquad \text{b) } \frac{\partial}{\partial t}(A, B) = \left(\frac{\partial A}{\partial t}, B \right) + \left(A, \frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

Zadanie 15.

1) Dla jakich wartości stałej α poniżej określone przekształcenie współrzędnej $q \rightarrow Q$ i pędu $p \rightarrow P$ jest przekształceniem kanonicznym?

$$\text{a) } Q = \alpha q + p \qquad P = 2q + 3p$$

$$\text{b) } Q = p^\alpha \sin(\gamma q) \qquad P = p^\alpha \cos(\gamma q)$$

2) Znaleźć funkcje tworzącą $W(q, Q)$ oraz $S(q, P)$ dla tego przekształcenia.

Odp. (częściowa dla przypadku a) $S(q, P) = \frac{1}{3} Pq - \frac{1}{3} q^2 + \frac{1}{6} P^2$

(częściowa dla przypadku b) $W(q, Q) = -\frac{Q^2}{2} \text{ctg}(2q)$

Zadanie 16. Funkcja Hamiltona układu ma postać: $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - Fq$

gdzie q -współrzędna uogólniona, p -pęd uogólniony

1) Zapisać tą funkcje w nowych zmiennych Q, P powiązanych ze zmiennymi q, p przekształceniem kanonicznym, którego funkcja tworząca $W(q, Q)$ ma postać:

$$W(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega \left[q - \frac{F}{m \omega^2} \right]^2 \text{ctg} Q$$

2) Zapisać równania Hamiltona w nowych zmiennych i je rozwiązać.

3) Korzystając z przekształceń kanonicznych znaleźć zależności $q(t), p(t)$.

Odp. (częściowa): Nowa funkcja Hamiltona: $\bar{H}(Q, P) = \bar{H}(P) = \omega P - \frac{F^2}{2m\omega^2}$

$$q = \pm \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q + \frac{F}{m\omega^2} = \pm \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + Q_0) + \frac{F}{m\omega^2} \quad p = \pm \sqrt{2m\omega P} \cos Q = \pm \sqrt{2m\omega P_0} \cos(\omega t + Q_0)$$

gdzie Q_0 i P_0 oznaczają stałe zależne od warunków początkowych ruchu.

Zadanie 17. Znaleźć przy pomocy równania Hamiltona-Jacobiego ruch ciała w jednorodnym polu siły ciężkości o potencjale: $V(z) = mgz$.

Zadanie 18. Mamy nić o długości l , której jeden koniec jest zaczepiony w początku układu współrzędnych O a drugi jej koniec leży w punkcie P położonym na osi Ox , przy czym dla dowolnego punktu nici $y > 0$. Pokazać, iż pole między nicią o osią Ox ma maksymalną powierzchnię wówczas gdy nić ta leży wzdłuż wycinka okręgu przechodzącego przez punkty O i P o środku leżącym na osi Ox .

Wsk.

1) Pokazać, iż powierzchnię szukanego pola można wyrazić jako funkcjonal $I[y]$ o postaci:

$$I[y] = \int_0^l F(y, y') ds \quad \text{gdzie} \quad F(y, y') = \sqrt{y^2 [1 - (y')^2]}, \quad y = y(s) \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad s\text{-odległość mierzona}$$

wzdłuż nici od początku układu współrzędnych do dowolnego punktu na nici o współrzędnych

$$(x, y). \quad \text{Wykorzystać to iż } (dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2 \rightarrow dx = \pm ds \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

Pokazać, iż warunkiem koniecznym osiągnięcia przez ten funkcjonal minimum dla wybranej

$$\text{postaci funkcji } y(x) \text{ jest spełnienie przez tę funkcję równania } \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y} = 0.$$

2) Pokazać, iż ponieważ funkcja $F(y, y')$ nie zależy explicite od s , to poszukiwanie rozwiązania

$$\text{równania: } \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y} = 0 \text{ można zastąpić poszukiwaniem rozwiązania równania}$$

$$y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} - F(y, y') = -b \quad \text{gdzie } y' = \frac{dy}{ds}, \quad b\text{-stała.}$$