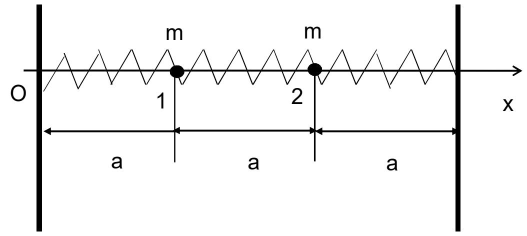
IV

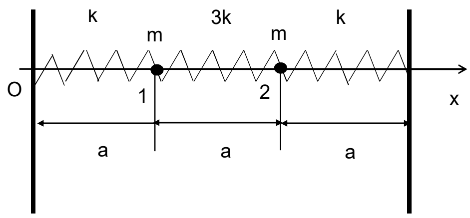
Zadanie 1. Dwa punkty materialne o tej samej masie równej m mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k, zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a.



Przyjmujemy za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).

1) Znaleźć energię potencjalną układu jako funkcję współrzędnych uogólnionych q_1, q_2. Pokazać iż energia ta przyjmuje wartość minimalną gdy $q_1 = q_2 = 0$ oraz to iż można ją przedstawić wzorem:
$$V = \frac{1}{2}\left(K_{11}q_1^2 + K_{22}q_2^2 + K_{12}q_1q_2 + K_{21}q_2q_1\right) + const$$
gdzie $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$ -stałe , $K_{12} = K_{21}$.
Znaleźć wartości stałych $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}, const$.
2) Pokazać iż energię kinetyczną układu można przedstawić wzorem $T = \frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{q}_1^2 + M_{22}\dot{q}_2^2 + M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + M_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1\right)$ gdzie $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ -stałe, $M_{12} = M_{21}$.
Znaleźć wartości stałych $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ (niektóre z nich mogą być równe zeru).
3) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu.
4) Znaleźć współrzędne normalne u_1 oraz u_2 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych u_1 oraz u_2 oraz ich pochodnych po czasie.

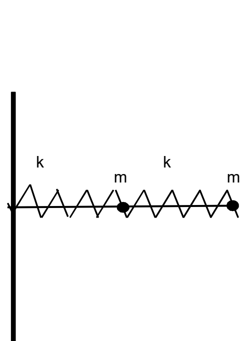
Zadanie 2. Dwa punkty materialne o tej samej masie równej m mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Współczynnik sprężystości sprężyny łączącej punkty materialne ze sobą jest równy $3k$, podczas gdy współczynnik sprężystości sprężyn łączących punkty materialne z końcami pręta jest równy k. Długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a.



1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ znaleźć funkcję Lagrange'a (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).
2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2

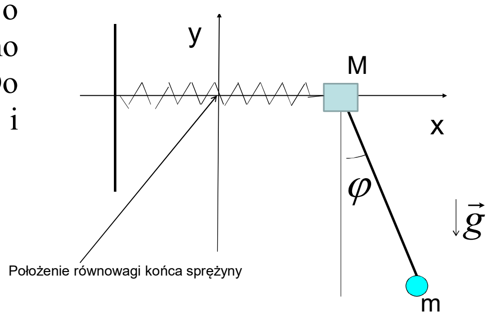
Odp. (częściowa) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad \omega_2 = \sqrt{7\frac{k}{m}}$

Zadanie 3. Rozważyć układ złożony z 2 punktów materialnych o jednakowych masach równych m połączonych ze sobą oraz z jednej strony ze ścianą przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości k. Punkty materialne mogą poruszać się tylko w kierunku **prostopadłym** do ściany. W stanie równowagi pokazanym na rysunku długości wszystkich sprężyn są jednakowe i na punkty materialne nie działa żadna siła. Wydłużenie lub skrócenie dowolnej sprężyny wywołuje powstanie siły sprężystości spełniającej prawo Hooke'a.
Wyznaczyć częstości kołowe drgań układu oraz znaleźć ogólne rozwiązanie opisujące zależność od czasu położeń drgających punktów w trakcie ich ruchu.



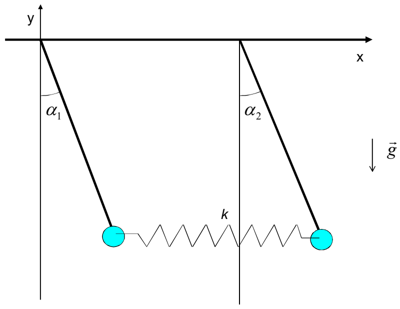
Odp. (częściowa) $\omega_1 = \sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\cdot\frac{k}{m}}$ $\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\cdot\frac{k}{m}}$

Zadanie 4. Ciało o masie M jest dołączone do sprężyny o współczynniku sprężystości k, której drugi koniec jest sztywno umocowany. Może ono poruszać się bez tarcia po poziomej prostej. Do ciała tego jest przyczepione wahadło matematyczne o masie m i długości l. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.
Wyznaczyć częstości kołowe małych drgań układu.



Wsk. Jako współrzędne uogólnione q_1, q_2 można przyjąć x-ową składową wektora wodzącego ciała o masie M oraz kąt φ jaki tworzy nić wahadła z pionem.
Energię potencjalną układu trzeba stosując odpowiednie przybliżenia zapisać w postaci $V = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f} K_{kl} q_k q_l + const$ gdzie f –liczba stopni swobody, q_k, q_l -współrzędne uogólnione, K_{kl} stałe takie iż $K_{kl}=K_{lk}$,. Energię kinetyczną układu trzeba w przybliżeniu zapisać w postaci $T = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f} M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$ gdzie M_{kl} stałe takie iż $M_{kl}=M_{lk}$.

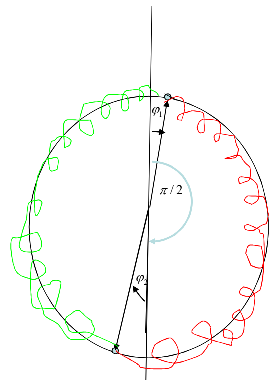
Zadanie 5. Dwa wahadła matematyczne o jednakowych masach równych m i jednakowych długościach równych l połączono sprężyną o stałej sprężystości k. Zakładamy iż wtedy gdy oba wahadła zwisają pionowo to sprężyna nie jest ściśnięta ani rozciągnięta. W trakcie ruchu wahadeł siła sprężystości spełnia zawsze prawo Hooke'a. Ponadto wychylenia wahadeł od pionu są niewielkie w trakcie ruchu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



Znaleźć częstości kołowe małych drgań rozważanego układu oraz określić postać zależności od czasu współrzędnych uogólnionych $\alpha_1(t)$ oraz $\alpha_2(t)$ określających wychylenie wahadeł od położenia równowagi w przybliżeniu małych drgań.
Wsk. Wzór na energie potencjalną zapisać wzorem przybliżonym pomijając wyrazy proporcjonalne do $\alpha_1^m\alpha_2^n$ gdy $m+n>2$. Uwzględnić wkłady do energii potencjalnej związane z siłą sprężystości oraz ciężkości. Pokazać iż wkład do energii potencjalnej związanej z siłą sprężystości równy $V = \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}-d\right)^2$ (d-długość sprężyny gdy oba wahadła zwisają pionowo do dołu) można przybliżyć wzorem $V = \frac{kl^2}{2}(\alpha_2-\alpha_1)^2$

Odp. (częściowa $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$

Zadanie 6. Dwa ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych m mogą poruszać się po okręgu koła o promieniu R. Każde z ciał jest połączone z drugim ciałem na okręgu przy pomocy dwóch sprężynek o stałej sprężystości k leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. W stanie równowagi ciała znajdują się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.



1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
2) Znaleźć częstość (częstości) małych drgań układu.
3) Znaleźć związek miedzy przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie.
4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie.

Wsk. Wielkość wychylenia ciała z położenia równowagi przybliżyć przez długość wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współrzędne uogólnione można przyjąć kąty φ_1 oraz φ_2 pokazane na rysunku. ***Odp.*** (częściowa do punktu 2) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$