

III

Zadanie 1. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k -dodatnia stała

1) Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Założyć iż $\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Zaniedbać wpływ siły ciężkości na

ruch ciała. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0 , przy czym: $x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0) = 0$.

2) Znaleźć uogólnioną energię. Czy jest ona stałą ruchu?

Wsk. Jako współzrzedną uogólnioną można przyjąć s -współzrzedną określającą aktualne położenie ciała względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 2. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k -znana dodatnia

stała oraz siła ciężkości $\vec{F}_c = m\vec{g} = (0, 0, -mg)$ zwrócona pionowo w dół.

Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0 , przy czym: $x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0) = 0$.

1) Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2 \sin^2(\alpha)$, $\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$, $\frac{k}{m} = \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Znana jest wartość przyspieszenia

ziemskiego g .

2) Znaleźć uogólnioną energię G . Czy jest ona całką ruchu ?

Wsk. Jako współzrzedną uogólnioną można przyjąć s -współzrzedną określającą aktualne położenie ciała względem początku układu współrzędnych.

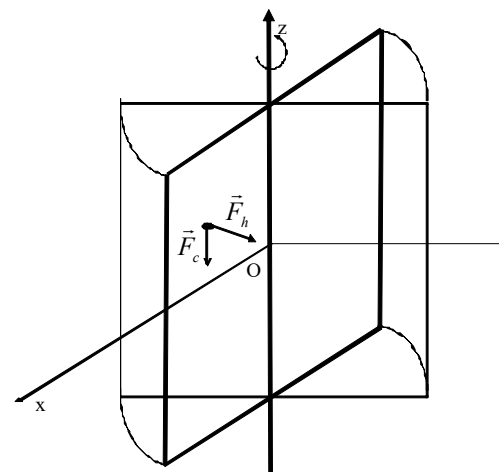
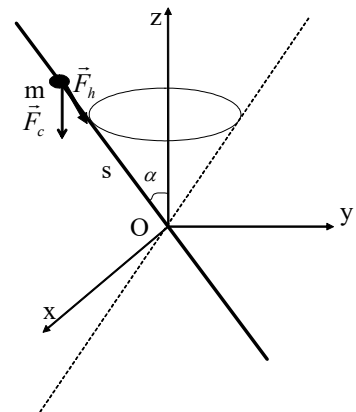
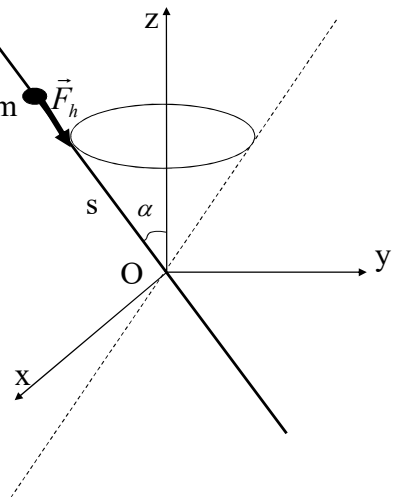
Zadanie 3. Pionowo ustawiona, gładka płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz, która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt

materialny o masie m , na który działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$

(gdzie g - wartość przyspieszenia ziemskiego) oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (gdzie k -znana dodatnia stała).

1) Znaleźć ruch punktu przy pomocy równań Lagrange'a II rodzaju.

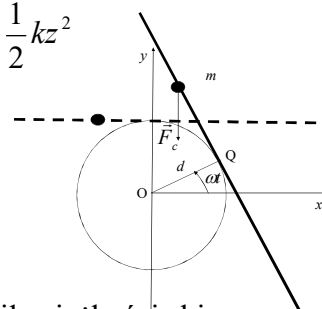
Wiadomo, iż w chwili $t=0$ oś Ox leżała na obracającej się płaszczyźnie.



Ponadto wiadomo, że $x(t=0) = x_0$, $z(t=0) = z_0$ oraz $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ i $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$. Rozważyć przypadki gdy $\frac{k}{m} < \omega^2$, $\frac{k}{m} > \omega^2$, $\frac{k}{m} = \omega^2$.

2) Znaleźć uogólnioną energię G . Czy jest on całką ruchu?

Odp. (częściowa do punktu 2) $G = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{m}{2} \dot{z}^2 - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 + mgz + \frac{1}{2} k \rho^2 + \frac{1}{2} kz^2$



Zadanie 4. W płaszczyźnie pionowej leży prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi d , przy czym w chwili początkowej $t=0$ prosta była położona równoległe do osi Oy.

Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $\vec{F}_c = (0, -mg)$. Nie uwzględniamy siły tarcia. Wiadomo, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie związanym z prostą, a jego współrzędne w układzie kartezjańskim były równe $x(t=0) = d$, $y(t=0) = s_0$. Znaleźć ruch ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. Za współzrzedną uogólnioną można przyjąć wielkość s określającą położenie ciała względem punktu Q leżącego na przecięciu analizowanej prostej z prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Rozwiązanie szczególne liniowego równania różniczkowego niejednorodnego ma postać funkcji trygonometrycznej

Odp. $s(t) = \left(s_0 - \frac{g}{2\omega^2} \right) \cosh(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \cos(\omega t)$

Zadanie 5. Zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju oraz wyznaczyć ruch punktu materialnego w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, -mg)$ po gładkiej odwróconej cykloidzie. Równanie parametryczne krzywej, po której porusza się punkt materialny:

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \quad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \quad R = \text{const} \quad -\pi \leq \varphi < \pi$$

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. Jako współzrzedną uogólnioną można przyjąć parametr φ . Przed rozwiązaniem równania Lagrange'a II rodzaju dokonać zamiany zmiennej φ na zmienną u określoną jako

$$u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (-4R \leq u < 4R).$$

Moduł u jest równy długości łuku cykloidy pomiędzy punktami określonymi przez $\varphi_p = 0$ oraz $\varphi_k = \varphi$. Można także przyjąć u jako współzrzedną uogólnioną i wyrazić znalezione funkcje Lagrange'a $L(\varphi, \dot{\varphi})$ jako funkcję tej nowej współzrzednej uogólnionej i jej pochodnej po czasie czyli znaleźć $L(u, \dot{u})$ po czym zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współzrzedną uogólnioną współzrzedną u .

Zadanie 6. Punkt materialny o masie m porusza się po gładkiej krzywej opisanej równaniami parametrycznymi: $x(\varphi) = b \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = b \sin(\varphi)$, $z(\varphi) = a\varphi$ w których a, b to dodatnie stałe. Na punkt działa siła $\vec{F} = (-kx, -ky, -kz - mg)$ gdzie k -stała dodatnia, g -wartość przyspieszenia ziemskiego.

1) Wyznaczyć, przy pomocy równania Lagrange'a II rodzaju, ruch punktu materialnego przy następujących warunkach początkowych ruchu: $z(t=0) = 0$, $\dot{z}(t=0) = 0$.

2) Znaleźć uogólnioną energię G . Czy jest on całką ruchu?

Odp. (częściowa do punktu 2)

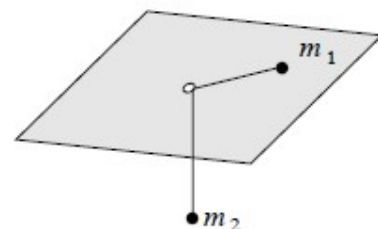
$$G = \frac{m}{2} (a^2 + b^2) \dot{\varphi}^2 + mga\varphi + \frac{1}{2} ka^2 \varphi^2 + \text{const}$$

Zadanie 7. Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej, rozszerzającej się powierzchni bocznej walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca ρ równy w chwili początkowej R_0 rozszerza się tak, iż $\rho(t) = R_0 + At$, gdzie R_0 i A to dodatnie stałe. Wiadomo ponadto, że w chwili początkowej $z(t=0) = z_0$, $\dot{z}(t=0) = 0$, $x(t=0) = R_0$, $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$.

- 1) Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch punktu materialnego. W oparciu o te równania znaleźć całkę ruchu i wyznaczyć ruch punktu materialnego.
- 2) Znaleźć uogólnioną energię. Czy jest ona stałą ruchu?

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Zadanie 8. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się punkt materialny o masie m_1 . Do punktu przymocowano wiotką i nierozciągliwą nici o długości l i pomijalnie małej masie, która przechodzi przez mały otwór w płaszczyźnie i dźwiga na drugim końcu pionowo zwisający punkt materialny o masie m_2 . Wiadomo iż w chwili początkowej punkt materialny o masie m_1 znajdował się w odległości ρ_0 od otworu i poruszał się po poziomej płaszczyźnie z prędkością skierowaną prostopadle do nici o wartości $V = \rho_0 \omega_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .



- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i zapisać równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu złożonego z obu punktów.
- 2) W oparciu o jedno z tych równań znaleźć całkę ruchu i z jej pomocą wyznaczyć $\ddot{\rho}$ w trakcie ruchu jako funkcję ρ gdzie ρ oznacza odległość ciała o masie m_1 od otworu w płaszczyźnie.
- 3) Jaka musi być wartość ω_0 aby ρ nie ulegało zmianie w trakcie ruchu?
- 4) Wyznaczyć pędy uogólnione związane ze współzrędnymi uogólnionymi oraz uogólnioną energię. Które z powyższych wielkości są całkami ruchu?

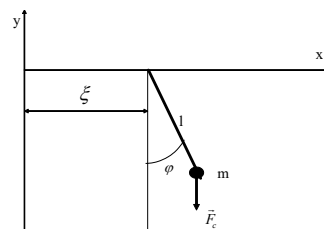
Odp. (do punktu 2)
$$\ddot{\rho} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g + \frac{m_1 \rho_0^4 \omega_0^2}{(m_1 + m_2) \rho^3}$$

Zadanie 9.

- 1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości l i masie m pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

a) $\xi = A \sin(\Omega t)$ (A, Ω - stałe)

b) $\xi = \frac{1}{2} A t^2$ (A - stała)



Za współzrędną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

- 2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ punkt o masie m umieszczony na końcu nici spoczywał w punkcie o współzrędnym $x(t=0) = 0$, $y(t=0) = -l$ (l - długość nici wahadła). Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można przyjąć iż $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$.

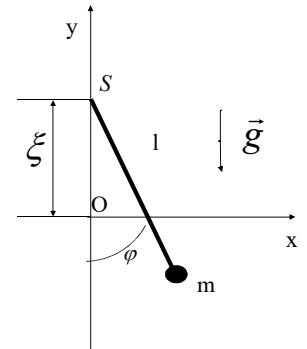
- *3) Znaleźć posługując się metodami numerycznymi ruch układu dla określonych powyżej warunków początkowych ruchu bez stosowania przybliżeń dla różnych wartości stałych A i Ω . Przyjąć iż $l=1\text{m}$. Przedyskutować, kiedy znalezione ściśle rozwiązania ruchu są w przybliżeniu zgodne z rozwiązaniami przybliżonymi uzyskanymi przy założeniu iż kąt określający odchylenie nici od pionu pozostaje mały w trakcie ruchu.

Wsk. (do punktu 2 gdy $\xi = A \sin(\Omega t)$). Rozwiązanie szczególne równania różniczkowego niejednorodnego ma postać funkcji trygonometrycznej

Odp. (do punktu 2 gdy $\xi = \frac{1}{2} A t^2$) $\varphi(t) = \frac{A}{l\omega^2} [\cos(\omega t) - 1]$

Zadanie 10.

1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości l i masie m pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej pionowej w taki sposób, iż jego położenie na osi pionowej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem: $\xi = \frac{1}{2} A t^2$ (A -stała). Znana jest wartość



przyspieszenia ziemskiego g . Za współrzędną uogólnioną przyjmij kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu.

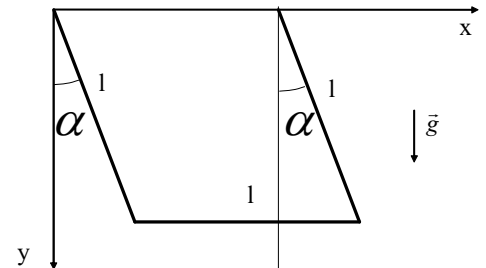
2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ ciało znajdujące się na końcu nici wahadła spoczywało przy czym kąt odchylenia nici od pionu był równy $\varphi(t=0) = \varphi_0$. Wyznacz ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$.

Odp. $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g + A}{l}}$

Zadanie 11. Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po powierzchni kuli o promieniu R pod wpływem siły ciężkości.

$\vec{F} = (0, 0, -mg)$ gdzie g to wartość przyspieszenia ziemskiego. Znaleźć całki ruchu.

Zadanie 12. Dany jest układ trzech sztywnych prętów o długości l i masie m każdy, połączonych w sposób podany na rysunku. Układ znajduje się w polu siły ciężkości. Wyznacz równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu. Zakładamy iż w trakcie ruchu pręt łączący dwa pręty zachowuje położenie poziome (a więc porusza się tylko ruchem postępowym).



Wsk. Energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznej poziomego pręta w ruchu postępowym i pozostałych prętów w ruchu obrotowym.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi obrotu jest równa $T = \frac{1}{2} I \omega^2$

gdzie I -moment bezwładności bryły względem osi obrotu.

Moment bezwładności pręta o masie m i o długości l wokół osi przechodzącej przez środek pręta i prostopadłej do pręta jest równy $I_0 = \frac{1}{12} m l^2$. Moment bezwładności bryły o masie m względem

dowolnej osi jest równy $I = I_0 + m d^2$, gdzie I_0 moment bezwładności tej bryły względem osi równoległej do rozważanej osi, przechodzącej przez jej środek masy i odległej od niej o d .

Energia potencjalna bryły w polu siły ciężkości jest równa energii potencjalnej punktu materialnego o masie równej masie bryły znajdującego się w środku masy bryły.

Za współrzędną uogólnioną przyjmij kąt α pokazany na rysunku.

Odp. $\alpha + \frac{6g}{5l} \sin(\alpha) = 0$