

II

Zadanie 1. Punkt materialny o masie m porusza się w przestrzeni trójwymiarowej po powierzchni o równaniu

- a) $z = bx^2$
- b) $z = cx^4$

gdzie b, c to znane stałe. Na punkt materialny działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (składowe siły ciężkości są równe $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$).

- 1) Napisać równania Lagrange'a pierwszego rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
- 2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t = t_0$ wiedząc, iż $x(t = t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t = t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. do punktu 2: Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów.

***Zadanie 2.** Punkt porusza się po gładkiej elipsoidzie o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (*)$$

bez działania żadnych sił (za wyjątkiem sił reakcji). Wykazać, przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju, że wartość jego prędkości jest stała.

Wsk. Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po zróżniczkowaniu po czasie równania (*).

Zadanie 3. Punkt materialny o masie m zsuwa się pod wpływem siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej spirali opisanej równaniami:

$$x = a \cos(kz) \quad y = a \sin(kz)$$

gdzie a, k to znane stałe, $a > 0$. Wyznaczyć ruch punktu materialnego przy pomocy

- a) równań Lagrange'a pierwszego rodzaju
- b) zasady d'Alemberta.

Wiadomo, że $z(t = 0) = z_0$ oraz $\dot{z}(t = 0) = \dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Znaleźć zależność od czasu siły reakcji działającej na punkt materialny.

Zadanie 4. Wyznaczyć przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju oraz zasady d'Alemberta ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po prostej leżącej na przecięciu płaszczyzn o równaniach $z = 2y$ oraz $z = x$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ (g -znana wartość przyspieszenia ziemskiego) skierowana pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t = 0) = 0, \dot{z}(t = 0) = 0$. Określić siłę reakcji działającą na punkt materialny ze strony więzów.

Odp. $x = z = \frac{4}{9} \frac{mg}{k} [\cos(\omega t) - 1]$, $y = \frac{2}{9} \frac{mg}{k} [\cos(\omega t) - 1]$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\vec{F}_R = \left(-\frac{4}{9} mg, -\frac{2}{9} mg, \frac{5}{9} mg \right)$

Zadanie 5. Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po płaszczyźnie o równaniu: $z = 3y$. Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ skierowana pionowo w dół. Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t = 0) = z_0, \dot{z}(t = 0) = \dot{z}_0, x(t = 0) = x_0, \dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$.

Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Odp. $x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t$; $y(t) = \frac{z_0}{3} + \frac{\dot{z}_0}{3} t - \frac{3}{20} g t^2$; $z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{9}{20} g t^2$; $\vec{F}_R = \left(0, -\frac{3}{10} mg, \frac{1}{10} mg \right)$

Zadanie 6. Wyznaczyć przy pomocy zasady d'Alemberta oraz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju ruch punktu materialnego o masie m poruszającego się bez tarcia po płaszczyźnie o równaniu:

a) $z = 3y$

b) $y = 4z$

Na punkt działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ skierowana pionowo w dół oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (k -znana stała dodatnia). Przyjąć, że w chwili początkowej: $z(t=0) = z_0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0, x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$. Określić również siłę reakcji płaszczyzny działającej na poruszający się punkt. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Zadanie 7. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni walca o równaniu $x^2 + y^2 = R^2$ pod działaniem siły proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych $\vec{F} = -k\vec{r}$ ($k > 0$) oraz siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Wiadomo przy tym, że $x(t=0) = R, z(t=0) = 0$ oraz $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$.

- 1) Sformułować równania Lagrange'a pierwszego rodzaju dla analizowanego zagadnienia we współrzędnych kartezjańskich i pokazać w oparciu o te równania, iż w trakcie ruchu są słuszne poniższe równania:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0 \quad (*)$$

$$m\ddot{z} + kz + mg = 0. \quad (**)$$

- 2) Wprowadzając w miejsce współrzędnych x i y nową zmienną φ związaną ze współrzędnymi kartezjańskimi równaniami:

$$x = R \cos(\varphi) \quad y = R \sin(\varphi)$$

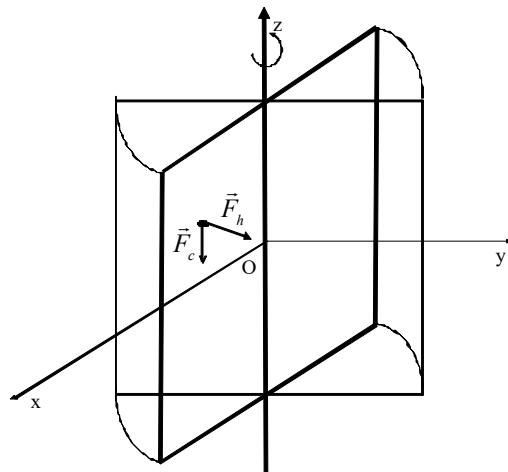
pokazać, iż równanie (*) można zapisać w postaci

$$\ddot{\varphi} = 0. \quad (***)$$

Zauważyć, iż równanie więzów nie wprowadza ograniczeń na dozwolone wartości, jakie może przyjąć zmienna φ .

- 3) Rozwiązać równania ruchu (**) i (***) przy podanych w zadaniu warunkach początkowych.
- 4) Znaleźć w układzie kartezjańskim składowe siły reakcji więzów działającej na punkt w trakcie jego ruchu.

Zadanie 8. Pionowo ustawiona płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz, która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który w układzie inercyjnym działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (g -znana wartość przyspieszenia ziemskiego, k -znana dodatnia stała). Znane są warunki początkowe ruchu: $x(t=0) = x_0 > 0, y(t=0) = 0, z(t=0) = 0$ oraz $\dot{x}(t=0) = 0, \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$.



- 1) Wyznaczyć ruch tego punktu korzystając z zasady d'Alemberta. Rozważyć przypadki gdy

a) $\frac{k}{m} < \omega^2$

b) $\frac{k}{m} > \omega^2$

c) $\frac{k}{m} = \omega^2$

- 2) Wykorzystując formalizm prowadzący do równań Lagrange'a pierwszego rodzaju pokazać iż składowa z-owa siły reakcji jest równa zero $F_{Rz} = 0$, oraz zachodzi poniższa relacja wiążąca ze sobą składowe x-ową F_{Rx} i y-ową F_{Ry} siły reakcji $F_{Ry} \sin(\omega t) = -F_{Rx} \cos(\omega t)$.

- 3) Określić siłę reakcji więzów działającą na ten punkt. Rozważyć przypadki gdy

a) $\frac{k}{m} < \omega^2$ b) $\frac{k}{m} > \omega^2$ c) $\frac{k}{m} = \omega^2$

Wsk. Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich można zapisać w postaci: $y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0$. Przy rozwiązywaniu różniczkowego równania ruchu zależnego od drugich pochodnych po czasie zmiennych x i y wprowadzić nową zmienną ρ (na wartości której równanie

więzów nie wprowadza ograniczeń) związaną ze współzrędnymi kartezjańskimi równaniami:
 $x = \rho \cos(\omega t)$ $y = \rho \sin(\omega t)$.

Odp. (do punktu 3)

1) Gdy $\omega^2 > \frac{k}{m}$ to $F_{Rx} = -2mx_0\gamma\omega \sinh(\gamma t) \sin(\omega t)$ $F_{Ry} = 2mx_0\gamma\omega \sinh(\gamma t) \cos(\omega t)$, $F_{Rz} = 0$ gdzie

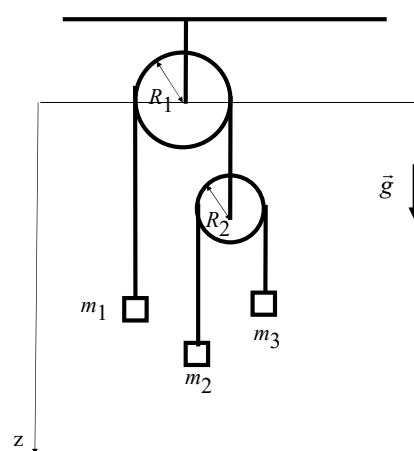
$$\gamma = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$$

2) Gdy $\omega^2 < \frac{k}{m}$ to $F_{Rx} = 2mx_0\Omega\omega \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$ $F_{Ry} = -2mx_0\Omega\omega \sin(\Omega t) \cos(\omega t)$, $F_{Rz} = 0$ gdzie

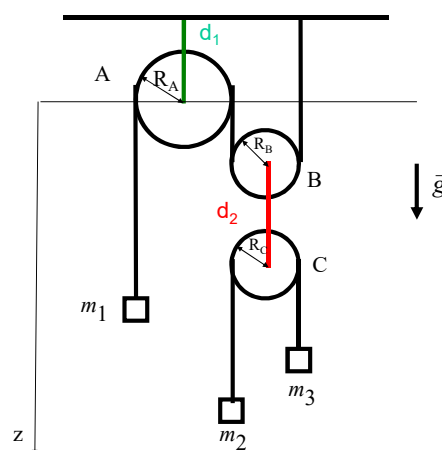
$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

3) Gdy $\omega^2 = \frac{k}{m}$ to $F_{Rx} = F_{Ry} = F_{Rz} = 0$

Zadanie 9. Znaleźć, wykorzystując zasadę d'Alemberta, przyspieszenia, z jakimi będą poruszać się klocki o masach m_1 , m_2 oraz m_3 pokazane na poniższym rysunku. Kłócek o masie m_1 jest połączony z nieważkim bloczkiem o promieniu R_2 liną o długości l_1 przerzuconą przez nieważki bloczek o promieniu R_1 . Bloczek o promieniu R_1 jest nieruchomy, zaś bloczek o promieniu R_2 może poruszać się tylko w kierunku pionowym. Przez bloczek o promieniu R_2 przerzucono linę o długości l_2 na końcach której umieszczono dwa klocki o masach równych m_2 oraz m_3 . Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Tarcie nieważkich i nierozciągliwych lin o bloczki pominąć.



Zadanie 10. Znaleźć przyspieszenia, z jakim poruszać się będą klocki o masach m_1 , m_2 oraz m_3 pokazane na rysunku. Kłócek o masie m_1 znajduje się na końcu liny o długości l_1 przerzuconej przez nieważkie bloczki A i B o promieniach R_A i R_B odpowiednio, której drugi koniec przymocowano do sufitu. Do bloczka B przymocowano przy pomocy czerwonego pręta o pomijalnie małej masie i długości d_2 nieważki bloczek C o promieniu R_C . Przez ten bloczek przerzucono linę o długości l_2 , na końcu której zwisają klocki o masach m_2 i m_3 odpowiednio. Tarcie lin o nieobracające się i nieważkie bloczki pominąć. Bloczki B i C mogą poruszać się tylko w kierunku pionowym, zaś bloczek A nie porusza się będąc sztywno przymocowany do sufitu przy pomocy pręta zielonego o pomijalnie małej masie i długości d_1 . Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół.

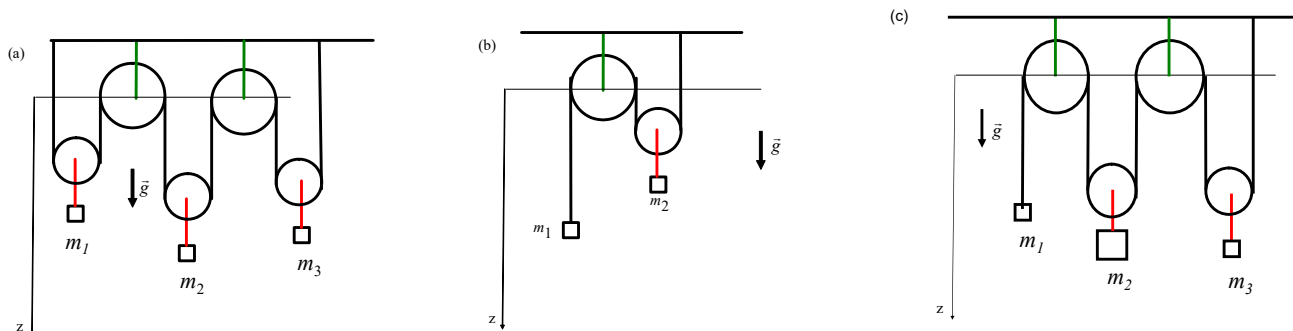


Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę d'Alemberta.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Odp. (częściowa) przyspieszenie ciała o masie m_2 : $\vec{a}_2 = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 2m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}$

Zadanie 11. Przez układ nieobracających się i nieważkich bloczków przerzucono linę o pomijalnie małej masie (rysunki poniżej).

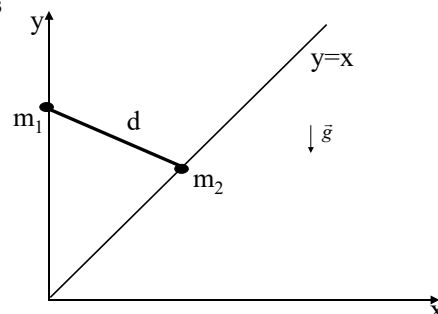


Lina ta z obu stron (rysunek a) lub z jednej strony (rysunki (b) i (c)) umocowana jest sztywno do sufitu. W przypadku sytuacji ukazanych na rysunkach (b) i (c) na drugim końcu liny umieszczono klocek o masie m_1 . Pozostałe klocki przymocowano sztywno do bloczków przy pomocy czerwonych prętów o pomijalnie małych masach. Bloczki dołączone przy pomocy zielonych prętów o pomijalnie małej masie do sufitu są nieruchome, zaś pozostałe bloczki wiszące na linie mogą poruszać się tylko w kierunku pionowym. Znaleźć przyspieszenia, z jakim poruszać się będą klocki o masach m_1 , m_2 oraz m_3 pokazane na rysunkach (a) i (c) oraz klocki o masach m_1 , m_2 na rysunku (b). Tarcie liny o bloczki pominąć. Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę d'Alemberta. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Odp. (częściowa)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \vec{a}_1 &= \frac{m_1 m_2 - 2m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}; \quad \vec{a}_2 = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 - 2m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g}; \quad \vec{a}_3 = \frac{-2m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g} \\ \text{b)} \quad \vec{a}_1 &= \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} \vec{g} \quad \text{c)} \quad \vec{a}_1 = \frac{4m_1 m_2 - 4m_2 m_3 + 4m_1 m_3}{4m_1 m_2 + 4m_1 m_3 + m_2 m_3} \vec{g} \end{aligned}$$

Zadanie 12. Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 znajdują się na płaszczyźnie o równaniu $z=0$ i są połączone sztywnym prętem o pomijalnie małej masie i długości d . Punkt o masie m_1 musi pozostać na prostej o równaniu $x=0$, zaś punkt o masie m_2 na prostej o równaniu $y=x$ (rysunek obok). Na punkty działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znaleźć położenie równowagi punktów wykorzystując zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a).



Zadanie 13. Dwa ciała o masach m_1 i m_2 poruszają się po gładkich prostych opisanych równaniami $y=-x$ oraz $y=x$ odpowiednio (rysunek obok) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół oraz siły odpychającej działającej w kierunku równoległym do prostej łączącej oba ciała, o wartości wprost proporcjonalnej do odległości r tych ciał od siebie ($|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = kr$). Wypadkowe siły (bez sił reakcji więzów) działające na ciała o masach m_1 i m_2 są więc równe odpowiednio:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{c1} = (-k(x_2 - x_1), -k(y_2 - y_1) - m_1 g) \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{c2} = (k(x_2 - x_1), k(y_2 - y_1) - m_2 g)$$

(k -dodatnia stała, g -wartość przyspieszenia ziemskiego).

1) Sformułować zasadę d'Alemberta dla opisanego układu oraz znaleźć równania ruchu.

2) Znaleźć położenie równowagi tych ciał. Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę prac wirtualnych (wynikającą z zasady d'Alemberta).

3) Znaleźć ruch obu ciał uwzględniając warunki początkowe ruchu pierwszego ciała

$$x_1(t=0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{drugiego ciała} \quad x_2(t=0) = x_{20}, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

Odp. (do punktu 2). $x_1 = -y_1 = -\frac{m_1 g}{2k} \quad x_2 = y_2 = \frac{m_2 g}{2k}$

