

I

Zadanie 1. W układach krzywoliniowych ortogonalnych, w których do określenia położenia służą współrzędne $q_i (i = 1, 2, 3)$, wektory wodzący $\vec{r}$, prędkości $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ i przyspieszenia

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ można przedstawić w następujących postaciach opisujących rozkład tych wektorów na składowe:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

gdzie $\vec{e}_i$ -wersory układu krzywoliniowego spełniające relacje

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Ponadto wiadomo, iż wersor $\vec{e}_i$ w dowolnym punkcie przestrzeni jest styczny do linii wzdłuż której zmienia się tylko współrzędna q_i i wskazuje kierunek przy przesuwaniu się wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta.

1) Pokazać iż dla dowolnych dwóch wektorów o znanym rozkładzie na składowe w układzie krzywoliniowym ortogonalnym $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ oraz $\vec{B} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ zachodzi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3, \quad |\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

2) Pokazać iż zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \vec{e}_i &= \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k} \right) & \text{b)} \quad r_i &= \frac{1}{2L_i} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i} \\ \text{c)} \quad v_i &= L_i \dot{q}_i & \text{d)} \quad a_i &= \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right] \end{aligned}$$

gdzie: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -wersory układu kartezjańskiego, x, y, z -składowe wektora wodzącego w układzie

kartezjańskim, q_i -współrzędne krzywoliniowe ($i = 1, 2, 3$), $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$,

$$L_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \text{ -współczynniki Lamé } (i = 1, 2, 3),$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2(q_1, q_2, q_3) + y^2(q_1, q_2, q_3) + z^2(q_1, q_2, q_3),$$

$$f(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2]$$

3) Pokazać iż moment pędu ciała o masie m można zapisać w następującej postaci z wykorzystaniem wyznacznika

$$\vec{L} = L_1 \vec{e}_1 + L_2 \vec{e}_2 + L_3 \vec{e}_3 = m \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

pozwalającej na znalezienie rozkładu tego wektora na składowe L_1, L_2, L_3 w układzie krzywoliniowym ortogonalnym.

4) Pokazać iż operator gradientu działający ma funkcje skalarną zależną od współrzędnych uogólnionych można wyrazić wzorem $grad = \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{e}_i$

Wsk. (do udowodnienia)

$$1) \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (\text{do punktu 2d})$$

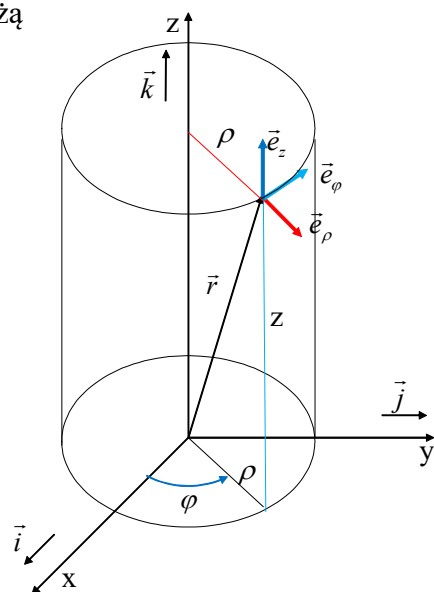
Zadanie 2. W układzie cylindrycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne ρ, φ, z których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = \rho \cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) \quad z = z$$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ cylindrycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych cylindrycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Zapisać w tym układzie operator gradientu.

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie $z=0$ kładąc $z=0$ oraz wprowadzając oznaczenie $r = \rho$.



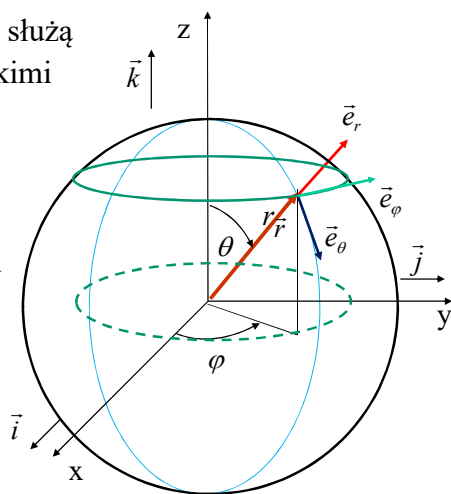
Zadanie 3. W układzie sferycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne r, θ, φ których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = r \cos(\varphi) \sin \theta \quad y = r \sin(\varphi) \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$ sferycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych sferycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie $z=0$ kładąc $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$.



Odp.

1) $\vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k}$, $\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$
 $\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$

2) $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$,

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta + (2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m[0\vec{e}_r - r^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi]$

3) $\vec{e}_r = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$, $\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$

$\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = -mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$

Zadanie 4. Rozważyć toroidalny ortogonalny układ współrzędnych. W układzie toroidalnym do określenia położenia ciała służą współrzędne r, φ, ψ których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = (a + r \cos(\varphi)) \cos \psi$$

$$y = (a + r \cos(\varphi)) \sin \psi$$

$$z = r \sin \varphi$$

gdzie a -stała dodatnia, przy czym $0 < r < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$.

1) Znaleźć związek między wersorami toroidalnego układu współrzędnych

a) $\vec{e}_r$

b) $\vec{e}_\varphi$

c) $\vec{e}_\psi$

oraz wersorami układu kartezjańskiego.

2) Znaleźć rozkład na składowe wektorów wodzącego $\vec{r}$ oraz prędkości $\dot{\vec{r}}$ we współrzędnych toroidalnych.

3) Znaleźć we współrzędnych toroidalnych składowe wektora przyspieszenia

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_\psi \vec{e}_\psi$$

a) a_r

b) a_φ

c) a_ψ

Zadanie 5. Znaleźć zależność od czasu $\varphi(t)$ czyli kąta jaki tworzy z osią Ox wektor wodzący punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r_0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeżeli kąt między promieniem wodzącym a wektorem przyspieszenia ma stałą wartość $\pi - \alpha$ przy czym $\alpha \in (0, \pi/2)$. Przyjąć, że $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$. Początek układu współrzędnych znajduje się w środku okręgu.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $\dot{\varphi} = u$.

Odp. $\varphi(t) = \text{ctg}(\alpha) \ln[\text{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1]$

Zadanie 6 (wykład). Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej danej wzorem

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

a) Pokazać iż, że moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ jest stały w trakcie ruchu ciała.

b) Wprowadzając układ biegunowy w płaszczyźnie ruchu ciała

1) pokazać, że w trakcie ruchu ciała nie ulega zmianie wartość energii danej wzorem

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r)$$

gdzie $V(r)$ oznacza energie potencjalną (potencjał) spełniający relację

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}.$$

2) pokazać, iż energie ciała $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r)$ można wyrazić wzorami

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r)$$

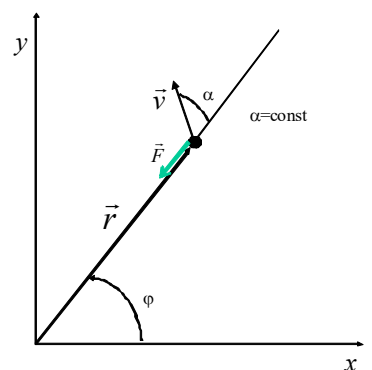
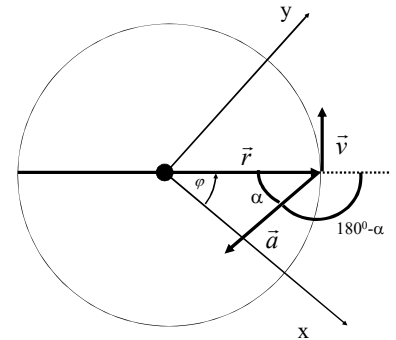
gdzie L –wartość momentu pędu ciała określonego względem początku układu współrzędnych

3) pokazać iż spełnione jest równanie (wzór Bineta):

$$f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right].$$

Wsk. $\vec{L} = mr^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$

Zadanie 7. Punkt materialny o masie m porusza się po płaszczyźnie pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych. Wiadomo iż w trakcie ruchu wektor wodzący punktu materialnego $\vec{r}$ tworzy **stały w czasie** kąt α z wektorem jego prędkości $\vec{v}$, zaś odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych $r = |\vec{r}|$ oraz miara kąta φ jaki tworzy jego wektor



wodzący z osią Ox rośnie. Ponadto wiadomo, iż w chwili $t=0$ odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych wynosiła $r(t=0) = r_0$, przy czym kąt jaki wektor wodzący punktu materialnego tworzył z osią Ox był równy $\varphi(t=0) = 0$. **Ponadto wartość prędkości punktu materialnego w chwili $t=0$ była równa $v(t=0)=v_0$.**

1) Określić równanie toru po którym porusza się to ciało.

2) Określić zależności od czasu:

a) kąta jaki jego wektor wodzący tworzył z osią Ox czyli określić postać zależności $\varphi(t)$.

b) odległości punktu materialnego od początku układu współrzędnych czyli określić postać zależności $r(t)$.

3) Pokazać iż wypadkowa siła działająca na ciało jest odwrotnie proporcjonalna do 3 potęgi odległości od centrum siły. Określić wartość siły w chwili czasu $t=0$.

4) Określić wartość energii punktu materialnego przy założeniu iż wartość energii potencjalnej w nieskończonej odległości od centrum siły jest równa 0.

Wsk. Moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$ jest stałą ruchu, $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$, przy rozwiązywaniu

punktu 3 wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ gdzie $L = |\vec{L}|$

Odp. (częściowa do punktu 3 i do punktu 4) $|\vec{F}(t=0)| = \frac{mv_0^2}{r_0}$, $E=0$

Zadanie 8. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ gdzie $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ ($\vec{r}$ - wektor wodzący ciała, α - stała)

Wykorzystując wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ oraz relacje

$E = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r)$ pokazać, że równanie opisujące tor ruchu ciała o masie m

w układzie biegunowym o początku w centrum siły w przypadku gdy $L \neq 0$ ma postać:

$r(\varphi) = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdy $\alpha > 0$ (siła skierowana w kierunku początku układu współrzędnych),

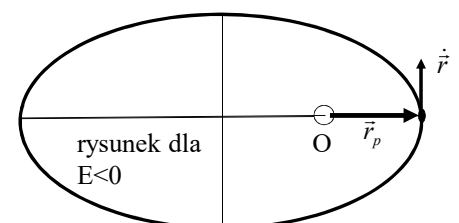
$r(\varphi) = \frac{P}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdy $\alpha < 0$ (siła skierowana w kierunku przeciwnym)

przy czym $P = \frac{L^2}{m|\alpha|}$ oraz $\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, E oznacza energię, $V(r)$ potencjał zaś L wartość

momentu pędu określonego względem początku układu.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

Zadanie 9. Elipsa o dużej półosi równej a oraz parametrze P jest torem ruchu ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych znajdującego się w ognisku elipsy o wartości



odwrotnie proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych.

Określić wartość stosunku $\frac{v_P}{v_A}$ gdzie v_P –wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie

w punkcie położonym najbliżej od początku układu współrzędnych oraz v_A - wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie w punkcie położonym najdalej od początku układu współrzędnych.

Wsk. Równanie parametryczne elipsy w układzie biegunowym:

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{gdzie } P - \text{parametr elipsy, } \varepsilon - \text{mimośród elipsy.}$$

$$\text{Odp. } \frac{|v_P|}{|v_A|} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{P}{a}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{P}{a}}}$$

Zadanie 10. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r} - \text{wektor wodzący ciała, } \alpha - \text{stała})$$

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi E i jest większa od zera, zaś moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych ma wartość $L \neq 0$. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} < 1$. Ponadto wiadomo iż odległość ciała od początku układu współrzędnych r osiąga wartość minimalną dla $\varphi = 0$.

Zanalizować jak na kształt toru wpływa wartość parametru $\kappa = \sqrt{1 - \frac{m\alpha}{L^2}}$. Naszkicować kształt toru dla wybranych wartości tego parametru. Czy ciało może oddalić się na nieskończoną odległość od centrum siły? Zakładając iż w chwili początkowej ciało znajdowało się w minimalnej odległości od centrum siły określić ile razy ciało to okrąży centrum siły zanim oddali się na nieskończoną odległość od centrum siły. Jak na ilość okrążeń wpływa wartość parametru κ ?

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ i wzór na całkowitą energię

$$\text{ciała } E = T + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r).$$

Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

Zadanie 11. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r} - \text{wektor wodzący ciała, } \alpha - \text{stała})$$

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi E i jest mniejsza od zera, zaś moment pędu ciała określony względem początku układu

współrzędnych ma wartość $L \neq 0$. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} > 1$. Ponadto wiadomo iż dla $\varphi = 0$ zachodzi

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0. \text{ Czy ciało to może osiągnąć położenie centrum siły w trakcie ruchu?}$$

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta i wzór na całkowitą energię ciała. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

Zadanie 12. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej: $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $f(r)$ pewna nieznana funkcja odległości ciała r od początku układu współrzędnych) po torze danym w układzie biegunowym wzorem:

$$\text{a) } r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)} \quad \text{b) } r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos\left(\frac{1}{4}\varphi\right)} \quad \text{c) } r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(3\varphi)}$$

gdzie φ -kąt określający położenie ciała w biegunowym układzie współrzędnych.

- 1) Znaleźć wartość prędkości $v = |\vec{v}|$ w zależności od r .
- 2) Wyznaczyć zależność $\varphi(t)$ -kąta φ od czasu.
- 3) Wykazać, że wartość siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych) czyli zachodzi $f(r) = \frac{\text{const}}{r^3}$. Czy siła ta działa w kierunku początku układu współrzędnych czy w kierunku przeciwnym?
- 4) Znaleźć całkowitą energię ciała zakładając iż wartość energii potencjalnej w nieskończonej odległości ciała od centrum siły jest równa 0.

Znane są warunki początkowe ruchu $r(t=0) = r_0$, $\varphi(t=0) = 0$, $v(t=0) = v_0$.

Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Zależność wartości prędkości v od r można określić wykorzystując równanie toru $r = r(\varphi)$ oraz wzory

$$\text{określające energię kinetyczną ciała: } T = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] \text{ oraz } T = \frac{mv^2}{2}. \text{ Brakujące}$$

stałe można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta.

Odp. (częściowa)

$$\text{ad a) } v(r) = v_0 \sqrt{16 - 15 \frac{r_0^2}{r^2}}, \varphi(t) = \frac{1}{4} \arctg\left(\frac{4v_0 t}{r_0}\right)$$

Zadanie 13. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $f(r)$ pewna nieznana funkcja odległości ciała r od początku układu współrzędnych) po torze danym w układzie biegunowym wzorem: $r(\varphi) = \frac{b}{\varphi}$ (gdzie b -znana stała dodatnia). Wiadomo iż dla $t=0$ $r(t=0) = r_0$ oraz wartość prędkości $v(t=0) = v_0$. Wiadomo ponadto iż nieznana co do wartości $\dot{\varphi}(t=0)$ jest dodatnia.

- 1) Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch ciała jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych)
- 2) Określić wartość momentu pędu ciała.

3) Określić całkowitą energię ciała $E = T + V$ przy założeniu iż wartość energii potencjalnej V w nieskończonej odległości od centrum siły jest równa 0.

4) Znaleźć zależność $\varphi = \varphi(t)$ oraz $r = r(t)$. Po jakim czasie ciało spadnie na centrum siły?
Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$.

Moment pędu można określić wykorzystując wzory określające energię kinetyczną ciała:

$$T = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] \text{ oraz } T = \frac{mv^2}{2} \text{ a także warunki początkowe ruchu.}$$

Odp. (częściowa) czas spadku $t_s = \frac{r_0}{v_0} \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}$, energia $E = \frac{mv_0^2}{2 \left(1 + \frac{b^2}{r_0^2} \right)}$

Zadanie 14. W ruchu pod wpływem siły centralnej punkt materialny o masie m porusza się po spirali logarytmicznej opisanej w układzie biegunowym wzorem $r = ae^{b\varphi}$ ($a > 0, b$ -stałe).

Siła działająca na punkt materialny jest stale skierowana w kierunku początku układu współrzędnych. Znaleźć zależność $\varphi = \varphi(t)$ oraz $r = r(t)$ gdy dla $t = 0$ $\varphi(t = 0) = 0$ oraz w chwili początkowej ruchu

a) wartość prędkości $v(t = 0) = v_0$.

b) wartość siły $|\vec{F}(t = 0)| = F_0$

Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych).

Odp. Do punktu a (częściowa) $\varphi(t) = \frac{1}{2b} \ln \left(\pm \frac{2bv_0}{a\sqrt{b^2 + 1}} t + 1 \right)$ $r(t) = \sqrt{\pm \frac{2abv_0}{\sqrt{b^2 + 1}} t + a^2}$

Zadanie 15. Dla ciała o masie m poruszającego się pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

(α -stała dodatnia) po paraboli o równaniu w układzie biegunowym wprowadzonym w

płaszczyźnie ruchu $z=0$: $r(\varphi) = \frac{P}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}$ gdzie $P = \frac{L_z^2}{m\alpha}$

znaleźć równanie wiążące czas trwania ruchu z kątem φ . Znana jest z-owa składowa momentu pędu ciała L_z . Założyć iż $\varphi(t = 0) = \varphi_0$.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego zastosować podstawienie

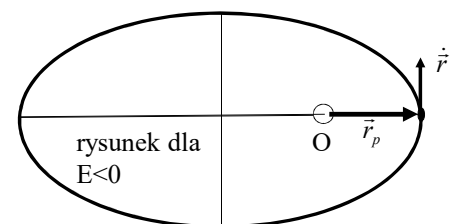
$\xi = \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)$. **Odp.** $t = \frac{L_z^3}{2m\alpha^2} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right]$.

Zadanie 16 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem

wypadkowej siły $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$, będącej siłą centralną. Ponadto siła

ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od

początku układu współrzędnych, tzn. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$. W oparciu o



równania ruchu pokazać, iż wektor Runge-Lentza zdefiniowany

wzorem: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $\vec{L}$ - moment pędu ciała)

a) jest stały w trakcie ruchu ciała

b) słuszny jest wzór: $\vec{M} = |\alpha| \varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ gdzie $\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, wektor $\vec{r}_p$ jest wektorem wodzącym punktu na torze ciała najbliższym położonym od początku układu współrzędnych. (ze wzoru tego wynika m.in. iż wektor jest Runge-Lentza jest równoległy do dużej półosi elipsy o mimośrodku ε , będącej torem ruchu ciała w przypadku gdy energia ciała jest ujemna $E < 0$)

Wsk.

- Skorzystać z zasady zachowania momentu pędu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ dla dowolnych wektorów $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$
- Aby udowodnić wzór $\vec{M} = |\alpha| \varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ wygodnie jest obliczyć wektor $\vec{M}$ w punkcie w którym odległość ciała od centrum siły (początku układu współrzędnych) jest najmniejsza.

***Zadanie. 17.** Znaleźć ruch ciała o masie $m=1\text{kg}$ pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

gdzie $f(r) = -\frac{\alpha}{r^\beta}$ ($\vec{r}$ - wektor wodzący ciała) dla następujących wartości stałych α, β

a) $\alpha=2\text{N}\cdot\text{m}^\beta$

b) $\beta=1.2, \beta=1.1, \beta=1.0, \beta=0.9$ oraz $\beta=0.8$

dla różnych wartości momentu pędu $L=0.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $L=0.75 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $L=1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ oraz różnych wartości energii ciała z zakresu $E_{\min} < E < 0$ gdzie $E_{\min}$ oznacza najmniejszą możliwą wartość energii ciała dla opisywanego ruchu przy przyjętej wartości L .

Zakładając iż chwili początkowej ruchu ciało znajdowało się najdalej od centrum siły określić w każdym przypadku zmianę kąta φ (określającego wraz z wielkością r położenie ciała w układzie biegunowym) po której ciało znajdzie się ponownie w tej samej odległości od centrum siły oraz zakres odległości od centrum siły w jakim zachodzi ruch. Określić jak zmiana pojedynczej wielkości od której zależy ruch ciała wpływa na jego ruch.

Wsk. Rozwiązać w sposób numeryczny układ równań różniczkowych

$$\dot{r} = u, \quad \dot{u} = \frac{f(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2 r^3}, \quad \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2}$$

Wynikają one z równania ruchu zapisanego w układzie biegunowym $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)$ przy uwzględnieniu istnienia stałej ruchu wyrażającej składową prostopadłą do płaszczyzny ruchu momentu pędu $L_z = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$

Wartość wielkości $u = \dot{r}$ w chwili początkowej ruchu można uzależnić od energii i momentu pędu korzystając z równania $E = \frac{m\dot{u}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ gdzie potencjał $V(r) = -\int f(r)dr$.