Zagadnienia do rozważenia przed egzaminem z mechaniki klasycznej dla studentów kierunku fizyka techniczna (dowody występują w pytaniach 1,6,7,13,15,17,20b, 22b,23)

1. Wyprowadzić równanie mogące służyć do wyznaczenia ruchu względnego dwóch ciał oddziałujących siłą centralną. Pokazać, iż równanie to ma taką postać jak równanie ruchu hipotetycznego ciała o masie zredukowanej poruszającego się pod wpływem siły centralnej. Powiązać energie kinetyczną układu ciał oraz moment pędu tego układu określony względem środka masy z energią kinetyczną i momentem pędu ciała o masie zredukowanej. Zakładając, iż siła działająca między obydwoma ciałami jest siłą potencjalną podać jakie wielkości są całkami ruchu dla tego układu.
2. Określić możliwe tory ruchu względnego dla układu złożonego z dwóch punktów materialnych oddziałujących siłą centralną, której wartość jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości tych ciał od siebie, w zależności od całkowitej energii układu w ruchu względnym. Założyć iż moment pędu układu określony względem środka masy układu jest różny od zera, a energia potencjalna układu dąży do zera gdy ciała te znajdują się w nieskończonej odległości od siebie. Powiązać występowanie określonego toru z energią układu ciał w ruchu względnym.
3. Rozważyć układ złożony z dwóch punktów materialnych oddziałujących siłą centralną, której wartość jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości tych ciał od siebie. Jakie wielkości są całkami ruchu dla tego układu?
4. Jakie więzy nazywamy holonomicznymi dwustronnymi? Kiedy więzy te są reonomiczne a kiedy skleronomiczne? Sformułować zasadę d'Alemberta dla układu punktów materialnych na które nałożono więzy holonomiczne dwustronne. Wyjaśnić sens symboli występujących w zasadzie d'Alemberta. Jaki jest związek przesunięcia wirtualnego z przesunięciem rzeczywistym punktu obrazu układu w przestrzeni konfiguracyjnej w przypadku występowania więzów holonomicznych dwustronnych skleronomicznych? Czy relacja taka zachodzi także wtedy gdy więzy są reonomiczne?
5. Jakie założenia dotyczące sił reakcji przyjmuje się przy formułowaniu zasady d'Alemberta? W przypadku jakich więzów siły reakcji więzów nie wykonują pracy podczas ruchu układu?
6. Sformułować równania Lagrange'a I rodzaju i pokazać, iż są one równoważne zasadzie d'Alemberta czyli zasadę d'Alemberta można wyprowadzić z równań Lagrange'a I rodzaju a równania Lagrange'a I rodzaju można wyprowadzić z zasady d'Alemberta.
7. Sformułować zasadę d'Alemberta oraz pokazać iż z zasady tej wynikają równania Lagrange'a II rodzaju zawierające współrzędne i siły uogólnione.
8. Sformułować zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a) służącą do określenia położenia równowagi układu punktów materialnych. Czym różni się ona od zasady d'Alemberta?
   Zakładając iż wszystkie siły działające w układzie są potencjalne jak można określić położenie równowagi układu na drodze analizy potencjału zależnego od współrzędnych uogólnionych wprowadzonych do opisu tego układu? Jak można sprawdzić czy położenie równowagi jest położeniem trwałym (stabilnym) na drodze analizy tego potencjału? Co można powiedzieć o siłach uogólnionych w położeniu równowagi?
9. Czym są współrzędne uogólnione? Jakie muszą posiadać one własności by można je było wykorzystać do opisu ruchu układu mechanicznego na ruch którego nałożono więzy? Czy równania więzów (zapisane we współrzędnych kartezjańskich) po wstawieniu do nich relacji wiążących współrzędne kartezjańskie ze współrzędnymi uogólnionymi wprowadzają ograniczenia na wartości jakie mogą przyjmować współrzędne uogólnione? Jaka ilość współrzędnych uogólnionych jest potrzebna do opisu w przestrzeni trójwymiarowej ruchu układu złożonego z n punktów materialnych, na ruch którego nałożono p więzów holonomicznych dwustronnych? Jak możemy powiązać siły uogólnione ze składowymi w układzie kartezjańskim sił działających na ciała wchodzące w skład układu? W jakiej ogólnej postaci zawierającej siły uogólnione można zapisać równania Lagrange'a II rodzaju?
10. Dla jakich układów można określić funkcje Lagrange'a? Jak można ją wyznaczyć? Jaki jest związek wielkości $V(q,t)$ oraz $U(q,\dot{q},t)$ wykorzystywanych do określenia tej

funkcji z siłami uogólnionymi? Czym są wielkości *V(q,t)* oraz $U(q,\dot{q},t)$? Jaką postać przyjmują równania Lagrange'a II rodzaju w przypadku układów dla których można wprowadzić funkcję Lagrange'a?

11. Jakie współrzędne nazywamy współrzędnymi cyklicznymi? Jakie wielkości związane z tymi współrzędnymi są całkami ruchu?
12. Jak definiujemy pęd uogólniony związany ze współrzędną uogólnioną? Kiedy pęd uogólniony jest całką ruchu? Czy pęd uogólniony może być składową momentu pędu ciała w pewnym krzywoliniowym układzie współrzędnych? Czy pęd uogólniony może być równy zeru gdy ciało spoczywa? Podać odpowiednie przykłady.
13. Pokazać, iż wówczas gdy związki między współrzędnymi kartezjańskimi punktów materialnych a współrzędnymi uogólnionymi nie zawierają czasu, a wszystkie siły działające w układzie są potencjalne (potencjał może zależeć tylko od współrzędnych uogólnionych i czasu) to uogólniona energia *G* (równa co do wartości funkcji Hamiltona *H*) jest równa sumie energii kinetycznej i potencjału układu punktów materialnych. Kiedy uogólniona energia jest stałą ruchu?
14. Omówić małe drgania układu mechanicznego wokół położenia równowagi. W szczególności określić:
    a) Wokół jakiego położenia równowagi układ może wykonywać małe drgania? Co można powiedzieć o zachowaniu potencjału wokół takiego położenia równowagi?
    b) W jakiej postaci należy zapisać wzory opisujące w sposób przybliżony energie kinetyczną i potencjalną układu mechanicznego wykonującego małe drgania wokół położenia równowagi? Zapisać te wzory w postaci macierzowej. Jakie wartości muszą przyjmować współrzędne uogólnione wykorzystane do sformułowania tych wzorów w położeniu równowagi?
    c) Jak można określić częstotliwość małych drgań analizowanego układu mechanicznego? Jaką ogólną postać ma zależność od czasu współrzędnych uogólnionych w trakcie małych drgań układu?
    d) Jakie współrzędne nazywamy współrzędnymi normalnymi? Jaką postać ma funkcja Lagrange'a przy przyjęciu za współrzędne uogólnione współrzędnych normalnych? Jakim zmianom podlegają macierze wprowadzone w puncie b) po dokonaniu transformacji współrzędnych uogólnionych do współrzędnych normalnych?
15. Sformułować zasadę wariacyjną Hamiltona. Co oznaczają symbole wprowadzone do zapisu tej zasady przy pomocy wzoru matematycznego? Pokazać równoważność zasady wariacyjnej Hamiltona z równaniami Lagrange'a II rodzaju. Czy spełnienie tej zasady stanowi także warunek dostateczny by działanie Hamiltona przyjmowało wartość minimalną dla ruchu rzeczywistego?
16.
    a) Jak definiujemy funkcje Hamiltona? Od jakich zmiennych może zależeć funkcja Hamiltona? Kiedy funkcja Hamiltona jest równa co do wartości sumie energii kinetycznej i potencjału układu? Kiedy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
    b) Zapisać w ogólnej postaci równania Hamiltona. Ile jest tych równań w przypadku układu o *f* stopniach swobody? Czym różnią się one od równań Lagrange'a II rodzaju? Zwrócić uwagę na rząd równań oraz ich liczbę.
    c) Sformułować twierdzenie Poissona-Jacobiego dotyczące znajdywania całek ruchu oraz podać przykład jego zastosowania.
17.
    Określić postać funkcji Lagrange'a i Hamiltona dla cząstki o ładunku *q* poruszającej się w polu elektromagnetycznym opisanym potencjałem skalarnym φ oraz wektorowym $\vec{A}$ danym w układzie kartezjańskim wzorem $\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ (potencjały te są zależne od składowych kartezjańskich wektora wodzącego cząstki). Założyć, iż na cząstkę nie nałożono więzów, a współrzędnymi uogólnionymi przyjętymi do opisu ruchu cząstki są współrzędne kartezjańskie. Określić pędy uogólnione związane z tymi współrzędnymi. Czy pędy uogólnione są równe zeru gdy cząstka spoczywa?
18. Omówić pojęcie przestrzeni fazowej w szczególności rozważyć następujące zagadnienia

a) Jaki wymiar ma przestrzeń fazowa dla układu o f stopniach swobody? Jakie wielkości określają położenie układu w przestrzeni fazowej w ustalonej chwili czasu?

b) Jakie unikalne właściwości posiada przestrzeń fazowa, które odróżniają ją od przestrzeni konfiguracyjnej? Czy trajektorie opisujące ruch punktu materialnego w przestrzeni fazowej mogą się przecinać? Czy trajektorie opisujące ruch punktu materialnego w przestrzeni konfiguracyjnej mogą się przecinać? Odpowiedź uzasadnić.

c) Sformułować twierdzenie Liouville'a.

19. Naszkicować trajektorie w przestrzeni fazowej dla wahadła matematycznego. Jak postać trajektorii zależy od energii całkowitej wahadła? Przyjąć iż energia potencjalna jest równa zeru gdy nić wahadła zwisa pionowo do dołu.

20.

a) Zdefiniować nawias Poissona dwóch funkcji zależnych od współrzędnych uogólnionych $q_1,.....,q_f$, pędów uogólnionych $p_1,.....,p_f$ oraz czasu. Czemu równe są nawiasy Poissona współrzędnych i pędów uogólnionych służących do opisu położenia analizowanego układu mechanicznego w przestrzeni fazowej?

b) Wykorzystując równania Hamiltona wypro0wadzić wzór wiążący pochodną zupełną po czasie funkcji $F(q,p,t)$ zależnej od współrzędnych uogólnionych, pędów uogólnionych i czasu z nawiasem Poissona. Kiedy funkcja F jest stałą ruchu? W szczególności określić kiedy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?

21.

a) Jakie przekształcenia współrzędnych i pędów z nimi kanonicznie sprzężonych nazywamy przekształceniami kanonicznymi? Co można powiedzieć o postaci równań Hamiltona zapisanych po dokonaniu przekształcenia kanonicznego? W jaki sposób można sprawdzić iż dane przekształcenie jest kanoniczne?

b) Czym jest funkcja S spełniająca poniższe równanie Hamiltona-Jacobiego

$$H(q,p=\frac{\partial S}{\partial q},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

Jakie przekształcenie kanoniczne ona opisuje? Jaką postać ma funkcja Hamiltona i równania Hamiltona w nowych zmiennych po tym przekształceniu?

22.

a) Sformułować twierdzenie Noether w wersji uproszczonej (bez uwzględnienia wariacji czasu rozważając funkcjonał w postaci działania Hamiltona).

b) Rozważyć układ złożony z punktów materialnych, na który nie nałożono więzów oraz transformacje tego układu polegającą na

I) translacji układu w przestrzeni wzdłuż osi Ox o dowolnie wybraną odległość.

II) obrocie układu wokół osi Oz o dowolnie wybrany kat

Jeżeli w wyniku takiej transformacji (niezależnie od wyboru odległości i kąta) działanie Hamiltona nie ulega zmianie to jaka wielkość jest na mocy twierdzenia Noether całką ruchu dla tego układu? Rozważyć przypadki I) i II). W przypadku translacji udowodnić odpowiedź bezpośrednio odwołując się do twierdzenia Noether.

23. Rozważyć ciągłą grupę transformacji współrzędnych uogólnionych $q_l \to q_l + \delta q_l$ ($l=1,...,f$,) opisujących pewien układ mechaniczny o f stopniach swobody (δq_l - wariacja współrzędnej q_l bez wariacji czasu). Pokazać, iż w przypadku gdy niezmiennikiem rozważanych transformacji jest działanie Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1,....,q_f,\dot{q}_1,.....,\dot{q}_f,t)dt$ określone jako całka oznaczona z funkcji Lagrange'a L (niezależnie od wyboru granic całkowania t_0,t_1) to istnieje całka (stała) ruchu określona wzorem $\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta q_l$ (udowodnić uproszczoną wersje twierdzenia Noether)

Zadania, bardzo zbliżone do zadań które mogą pojawić się na egzaminie:

Zadanie 1. Ciało o masie *m* porusza się pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, będącej siłą centralną. Ponadto siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od początku układu współrzędnych, tzn. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ (gdzie α-stała). W oparciu o równania ruchu pokazać, iż wektor Runge-Lentz'a zdefiniowany wzorem: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $\vec{L}$ -moment pędu ciała) jest stały w trakcie ruchu ciała

Zadanie 2. Ciało o masie *m* porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}$ ($\vec{r}$ -wektor wodzący ciała, α -stała)

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi *E* i jest większa od zera, zaś moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych ma wartość *L≠0*. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} < 1$. Ponadto wiadomo iż odległość ciała od początku układu współrzędnych *r* osiąga wartość minimalną dla $\varphi = 0$.

Wsk. W ruchu pod wpływem siły centralnej:

wypadkowa siła $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ gdzie $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$,

energia kinetyczna $T = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right]$ ($L = |\vec{L}|$)

Zadanie 3. Punkt materialny o masie *m* zsuwa się pod wpływem siły ciężkości $\vec{F} = (0,0,-mg)$ po spirali opisanej równaniami:

$x(z) = a\cos(kz)$ $\qquad$ $y(z) = a\sin(kz)$

gdzie *a,k* to dodatnie stałe.

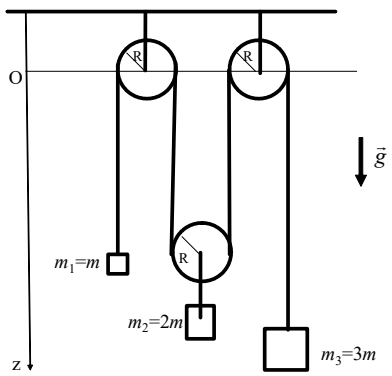
Wyznaczyć ruch punktu materialnego przy pomocy

a) zasady d'Alemberta.

b) równań Lagrange'a I rodzaju

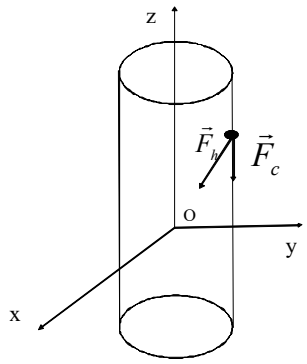
Znane są warunki początkowe ruchu $z(t=0) = z_0$ oraz $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.

Zadanie 4. Znaleźć przyspieszenie, z jakim poruszać się będzie klocek o masie $m_1=m$ pokazany na poniższym rysunku. Klocki o masach $m_1=m$ i $m_3=3m$ są połączone nieważką i nierozciągliwą nicią przerzuconą przez układ nieważkich i nieobracających się bloczków pokazanych na rysunku. Do środka jednego z bloczków, który może poruszać się w kierunku pionowym, dołączony jest klocek o masie $m_2=2m$. Pozostałe bloczki są całkowicie nieruchome. Tarcie liny o bloczki pominąć. Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.



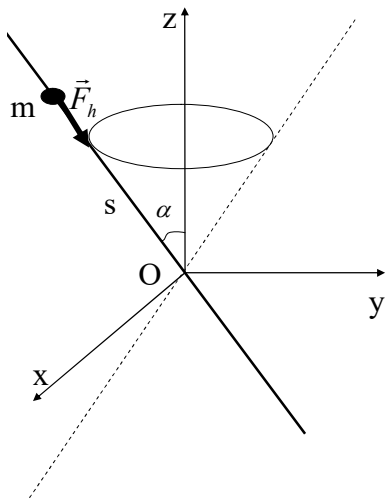
Zadanie rozwiązać wykorzystując zasadę d'Alemberta.

Zadanie 5. Punkt materialny o masie m porusza się po powierzchni bocznej walca o równaniu $x^2 + y^2 = R^2$ (R-promień podstawy walca) pod działaniem siły proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kr, -ky, -kz)$ (k-znana stała dodatnia) oraz siły ciężkości $\vec{F}_c = (0,0,-mg)$. Wiadomo przy tym, że $x(t=0) = R$, $z(t=0) = z_0$ oraz $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$, $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



a) Sformułować zasadę d'Alemberta dla tego układu
b) Zapisać równania Lagrange'a I rodzaju dla tego układu
c) Znaleźć funkcję Lagrange'a opisującą ruch punktu materialnego.
d) Napisać równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch punktu materialnego.
e) Rozwiązać te równania i znaleźć ruch punktu materialnego.

Zadanie 6. Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$) obraca się dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m. Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k-dodatnia stała. Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Założyć iż $\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Zaniedbać wpływ siły ciężkości na ruch ciała. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0, przy czym: $x(t=0) = s_0 \sin(\alpha)$, $y(t=0) = 0$.

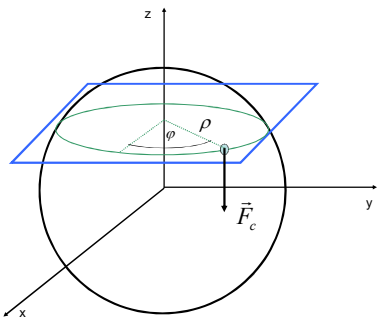


Zadanie 7. Znaleźć funkcje Lagrange'a oraz zapisać równania Lagrange'a II rodzaju w przypadku elektronu o ładunku $e<0$ i masie m poruszającego się w stałym jednorodnym polu magnetycznym opisanym poprzez potencjał skalarny równy zeru i potencjał wektorowym określony we współrzędnych kartezjańskich przez wektor $\vec{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right)$ (gdzie B-stała, x,y- współrzędne w układzie kartezjańskim).

Znaleźć pędu uogólnione związane ze współrzędnymi uogólnionymi oraz uogólnioną energie G. Które z powyższych wielkości są stałymi (całkami) ruchu?

Wsk. $L = T - U$, $U = -e\vec{v} \cdot \vec{A}$, gdzie $\vec{v}$ -prędkość.

Zadanie 8. Rozważyć ruch ciała (punktu materialnego), które porusza się po przecięciu powierzchni kuli o promieniu R i środku w początku układu współrzędnych $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ oraz drgającej wzdłuż os OZ płaszczyzny zgodnie z równaniem $z = R\sin(\omega t)$ w polu siły ciężkości. $\vec{F}_c = [0,0,-mg]$ w przedziale czasu $\left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right)$. Znane są warunki początkowe ruchu: $x(t=0) = R, \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$.



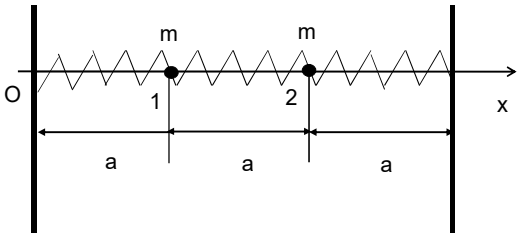
1) Zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując za współrzędna uogólnioną kąt φ w układzie sferycznym

2) Określić pęd uogólnionym związanym z tą współrzędną

3) Znaleźć ruch punktu materialnego.

3) Znaleźć uogólnioną energie G. Czy jest ona całką ruchu?

Zadanie 9. Dwa punkty materialne o tej samej masie równej m mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k, zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a.



1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ znaleźć funkcję Lagrange'a (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).
2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań własnych układu oraz znaleźć równania opisujące zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu punktów materialnych (równania te mogą zawierać 4 stałe zależne od warunków początkowych ruchu).

Zadanie 10. Znaleźć funkcje Lagrange'a, pędy uogólnione związane (sprzężone kanonicznie) ze współrzędnymi uogólnionymi oraz funkcje Hamiltona oraz zapisać równania Lagrange'a II rodzaju oraz równania Hamiltona w przypadku cząstki o masie m poruszającej się po powierzchni kuli o promieniu R pod wpływem siły ciężkości $\vec{F}_c = (0,0,-mg)$
Określić czy funkcja Hamiltona oraz pędy uogólnione kanonicznie sprężone z wybranymi współrzędnymi uogólnionymi są stałymi ruchu.

Zadanie 11. Znaleźć funkcje Lagrange'a, pędy uogólnione związane (sprzężone kanonicznie) ze współrzędnymi uogólnionymi oraz funkcje Hamiltona oraz zapisać równania Hamiltona w przypadku elektronu o ładunku $e<0$ i masie m poruszającego się w stałym jednorodnym polu magnetycznym opisanym poprzez potencjał skalarny równy zeru i potencjał wektorowy określony we współrzędnych cylindrycznych przez wektor $\vec{A} = \frac{B\rho}{2}\vec{e}_\varphi$ (gdzie B-stała, ρ-jedna z trzech współrzędnych w układzie cylindrycznym).
Za współrzędne uogólnione przyjąć współrzędne w układzie cylindrycznym. Czy funkcja Hamiltona oraz pędy uogólnione kanonicznie sprężone z wybranymi współrzędnymi uogólnionymi są stałymi ruchu?
Wsk. $L = T - U$, $U = -e\vec{v}\cdot\vec{A}$, gdzie prędkość: $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$, $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ -wersory układu cylindrycznego