Przykładowe pytania egzaminacyjne na egzaminie z mechaniki dla studentów kierunku fizyka techniczna

1. Jakie warunki muszą być spełnione by w trakcie ruchu układu złozonego z punktów materuialnych nie ulegały zmianie pęd układu, moment pędu układu oraz całkowita energia mechaniczna układu? Jak można wyznaczyć tą energię? Jak występowanie powyższych całek ruchu można powiązać z symetrią układu?
2.
   a) Sformułować związek pomiędzy momentem pędu układu punktów materialnych a wypadkowym momentem siły działającym na ten układ zakładając iż oba te momenty określamy względem początku inercjalnego układu współrzędnych.
   b) Pokazać iż z zachodzenia relacji zapisanej w punkcie a) wynika analogiczna relacja dla tych momentów gdy momenty te określimy względem środka masy układu, nawet wówczas gdy środek masy nie spoczywa w żadnym układzie inercjalnym. Założyć iż siły działające w układzie nie zależą od układu współrzędnych w którym je analizujemy.
3. Jak transformują się prędkość oraz przyspieszenie punktu materialnego przy przejściu od nieruchomego układu odniesienia do układu odniesienia, którego ruch jest złożeniem ruchu postępowego ze zmienną prędkością $\vec{V}(t)$ oraz ruchu obrotowego ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(t=0)$.
4. Wyprowadzić równanie mogące służyć do wyznaczenia ruchu względnego dwóch ciał oddziałujących siłą centralną. Pokazać iż równanie to ma taką postać jak równanie ruchu hipotetycznego ciała o masie zredukowanej poruszającego się pod wpływem siły centralnej. Powiązać energie kinetyczną układu ciał oraz moment pędu tego układu określony względem środka masy z energią kinetyczną i momentem pędu ciała o masie zredukowanej.
5. Wyprowadzić wzór Bineta: $-\frac{L^2}{\mu r^2}\{\frac{d^2}{d\varphi^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r}\} = f(r)$. Co oznaczają symbole występujące w tym wzorze? W przypadku jakich układów wzór ten obowiązuje? Do czego można wykorzystać wzór Bineta?

   Wsk. W układzie biegunowym $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_{\vec{r}} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_{\varphi}$; $\vec{L} = \mu r^2\dot{\varphi}\vec{k}$
6. Określić możliwe tory ruchu względnego dla układu złożonego z dwóch punktów materialnych oddziałujących siłą centralną, której wartość jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości tych ciał od siebie, w zależności od całkowitej energii układu w ruchu względnym. Założyć iż moment pędu układu określony względem środka masy układu jest różny od zera, a energia potencjalna układu dąży do zera gdy ciała te znajdują się w nieskończonej odległości od siebie. Powiązać występowanie określonego toru z energią układu ciał w ruchu względnym.
7. Jak definiujemy wektor Runge-Lenza w przypadku układu ciał oddziałujących siłą centralną ? Dla jakiej siły centralnej jest on całką ruchu? Pokazać iż wektor ten jest całką ruchu dla tej siły. Jaki jest kierunek wektora Runge-Lenza gdy jest on całką ruchu? Jak można wykorzystać fakt stałości tego wektora do wyznaczenia toru ruchu względnego.
8. Jakie więzy nazywamy holonomicznymi dwustronnymi? Kiedy więzy te są reonomiczne a kiedy skleronomiczne?
9. Sformułować zasadę d'Alemberta dla układu punktów materialnych na które nałożono więzy holonomiczne dwustronne. Wyjaśnić sens symboli występujących w zasadzie d'Alemberta. Jaki jest związek przesunięcia wirtualnego z przesunięciem rzeczywistym punktu obrazu układu w przestrzeni konfiguracyjnej w przypadku występowania więzów holonomicznych dwustronnych skleronomicznych? Czy relacja taka zachodzi także gdy więzy są reonomiczne? Jakie założenia dotyczące sił reakcji przyjmuje się przy formułowaniu zasady d'Alemberta?
10. Sformułować zasadę d'Alemberta oraz pokazać iż z zasady d'Alemberta wynikają równania Lagrange'a I rodzaju.
11. Sformułować zasadę d'Alemberta oraz pokazać iż z zasady tej wynikają równania ruchu Lagrange'a II rodzaju zawierające współrzędne i siły uogólnione.
12. Sformułować zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a) służącą do określenia położenia równowagi układu punktów. Zakładając iż wszystkie siły działające w

układzie są potencjalne, co można powiedzieć o siłach uogólnionych w położeniu równowagi?

13. Czym są współrzędne uogólnione? Jakie muszą posiadać one własności by można je było wykorzystać do opisu ruchu układu mechanicznego na ruch którego nałożono więzy? Jaka ilość współrzędnych jest potrzebna do opisu w przestrzeni trójwymiarowej ruchu układu złożonego z n punktów materialnych, na ruch którego nałożono p więzów holonomicznych dwustronnych? Jak możemy powiązać siły uogólnione ze składowymi w układzie kartezjańskim sił działających na ciała wchodzące w skład układu? W jakiej ogólnej postaci zawierającej siły uogólnione można zapisać równania Lagrange'a II rodzaju?
14. Dla jakich układów można określić funkcje Lagrange'a? Jak można ją wyznaczyć? Jaki jest związek wielkości $V(q,t)$ oraz $U(q,\dot{q},t)$ wykorzystywanych do określenia tej funkcji z siłami uogólnionymi? Jaką postać przyjmują równania Lagrange'a II rodzaju w przypadku układów dla których można wprowadzić funkcję Lagrange'a?
15. Jakie współrzędne nazywamy współrzędnymi cyklicznymi? Jakie wielkości związane z tymi współrzędnymi są całkami ruchu?
16. Jak definiujemy pęd uogólniony związany ze współrzędną uogólnioną? Kiedy pęd uogólniony jest całką ruchu? Czy pęd uogólniony może być składową momentu pędu ciała w pewnym krzywoliniowym układzie współrzędnych? Czy pęd uogólniony może być równy zeru gdy ciało spoczywa? Podać odpowiednie przykłady.
17. Pokazać, iż wówczas gdy związki między współrzędnymi kartezjańskimi punktów materialnych a współrzędnymi uogólnionymi nie zawierają czasu, a wszystkie siły działające w układzie są potencjalne (potencjał może zależeć tylko od współrzędnych uogólnionych i czasu) to uogólniona energia G (równa co do wartości funkcji Hamiltona H) jest równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej układu punktów materialnych. Kiedy uogólniona energia jest stałą ruchu?
18. Omówić małe drgania układu mechanicznego wokół położenia równowagi. W szczególności określić:
    a) W jakiej postaci należy zapisać wzory opisujące w sposób przybliżony energie kinetyczną i potencjalną układu mechanicznego wykonującego małe drgania wokół położenia równowagi? Zapisać te wzory w postaci macierzowej. Jakie wartości muszą przyjmować współrzędne uogólnione wykorzystane do sformułowania tych wzorów w położeniu równowagi? Co można powiedzieć o energii potencjalnej układu w położeniu równowagi?
    b) Jak można określić częstotliwość małych drgań analizowanego układu mechanicznego? Jaką ogólną postać ma zależność od czasu współrzędnych uogólnionych w trakcie małych drgań układu?
    c) Jakie współrzędne nazywamy współrzędnymi normalnymi? Jaką postać ma funkcja Lagrange'a przy przyjęciu za współrzędne uogólnione współrzędnych normalnych? Jakim zmianom podlegają macierze wprowadzone w puncie a) po dokonaniu transformacji współrzędnych uogólnionych do współrzędnych normalnych?
19. Sformułować zasadę wariacyjną Hamiltona. Co oznaczają symbole wprowadzone do zapisu tej zasady przy pomocy wzoru matematycznego? Pokazać równoważność zasady wariacyjnej Hamiltona z równaniami Lagrange'a II rodzaju. Czy spełnienie zasady Hamiltona jest warunkiem koniecznym do tego by działanie Hamiltona przyjmowało wartość minimalną dla ruchu rzeczywistego w klasie ruchów porównawczych w przypadku których położenie ciała w ruchu porównawczym jest takie same jak w ruchu rzeczywistym w chwili początkowej i końcowej analizy ruchu? Czy spełnienie tej zasady stanowi także warunek dostateczny by działanie Hamiltona przyjmowało wartość minimalną dla ruchu rzeczywistego?
20.
    a) Sformułować twierdzenie Noether w wersji uproszczonej (bez uwzględnienia wariacji czasu i rozważania funkcjonału mającego postać działania Hamiltona).
    b) Rozważyć układ złożony z punktów materialnych na który nie nałożono więzów oraz transformacje tego układu polegającą na
        I) translacji układu w przestrzeni wzdłuż osi Ox o dowolnie wybraną odległość.

II) obrocie układu wokół osi Oz o dowolnie wybrany kat

Jeżeli w wyniku takiej transformacji (niezależnie od wyboru odległości i kąta) działanie Hamiltona nie ulega zmianie to jaka wielkość jest na mocy twierdzenia Noether całką ruchu dla tego układu? Rozważyć przypadki I) i II).

21. Rozważyć ciągłą grupę transformacji współrzędnych uogólnionych $q_l \to q_l + \delta q_l$ (*l=1,...f,*) opisujących pewien układ mechaniczny o f stopniach swobody (δq_l - wariacja współrzędnej q_l bez wariacji czasu). Pokazać iż w przypadku gdy niezmiennikiem rozważanych transformacji jest działanie Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1,....,q_f,\dot{q}_1,.....,\dot{q}_f,t)dt$ (określone dla dowolnych czasów t_0,t_1 jako całka z funkcji Lagrange'a L) to istnieje całka (stała) ruchu określona wzorem $\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l$ (udowodnić uproszczoną wersje twierdzenia Noether)

22.
   a) Jak definiujemy funkcje Hamiltona. Od jakich zmiennych może zależeć funkcja Hamiltona? Kiedy funkcja Hamiltona jest równa co do wartości sumie energii kinetycznej i potencjalnej układu?
   b) Zapisać w ogólnej postaci równania Hamiltona. Czym różnią się one od równań Lagrange'a II rodzaju? Zwrócić uwagę na rząd równań oraz ich liczbę.

23. Określić postać funkcji Hamiltona dla cząstki o ładunku q poruszającej się w polu elektromagnetycznym opisanym potencjałem wektorowym $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ oraz skalarnym φ zależnymi od składowych kartezjańskich wektora wodzącego cząstki. Założyć iż na cząstkę nie nałożono więzów, a współrzędnymi uogólnionymi przyjętymi do opisu ruchu cząstki są współrzędne kartezjańskie.

24. Jakie unikalne własności posiada przestrzeń fazowa, które odróżniają ją od przestrzeni konfiguracyjnej? W szczególności podać
   a) Czy trajektorie opisujące ruch punktu materialnego w przestrzeni fazowej mogą się przecinać? Czy trajektorie opisujące ruch punktu materialnego w przestrzeni konfiguracyjnej mogą się przecinać? Odpowiedź uzasadnić.
   b) Sformułować twierdzenie Liouville'a.

25.
   a) Zdefiniować nawias Poissona dwóch funkcji zależnych od współrzędnych uogólnionych $q_1,........,q_f$, pędów uogólnionych $p_1,........,p_f$ oraz czasu. Czemu równe są nawiasy Poissona współrzędnych i pędów uogólnionych służących do opisu położenia analizowanego układu mechanicznego w przestrzeni fazowej?
   b) Wykorzystując równania Hamiltona wyprowadzić wzór wiążący pochodną zupełną po czasie funkcji $F(q,p,t)$ zależnej od współrzędnych uogólnionych , pędów uogólnionych i czasu z nawiasem Poissona. Kiedy funkcja $F(q,p,t)$ jest stałą ruchu? W szczególności określić kiedy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?
   c) Sformułować twierdzenie Poissona-Jacobiego oraz podać przykład jego zastosowania

26.
   a) Jakie przekształcenia współrzędnych i pędów z nimi kanonicznie sprzężonych nazywamy przekształceniami kanonicznymi? Co można powiedzieć o postaci równań Hamiltona zapisanych po dokonaniu przekształcenia kanonicznego? W jaki sposób można sprawdzić iż dane przekształcenie jest kanoniczne?
   b) Czym jest funkcja S spełniająca poniższe równanie Hamiltona-Jacobiego

$$H(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

   Jakie przekształcenie kanoniczne opisuje? Jaką postać ma funkcja Hamiltona i równania Hamiltona w nowych zmiennych po tym przekształceniu?

27. Równanie Hamiltona-Jacobiego. Co daje rozwiązanie tego równania? Dlaczego znalezienie jego rozwiązania pozwala na określenie ruchu układu w przestrzeni fazowej? Kiedy i w jaki sposób można dokonać separacji zmiennych w równaniu Hamiltona-Jacobiego? Podać przykłady
28. Jak można wyznaczyć tensor momentu bezwładności dla bryły sztywnej? Jakie cechy posiada ten tensor? Jakie osie nazywamy osiami głównymi tensora momentu bezwładności bryły? Czy wybór tych osi jest zawsze jednoznaczny? Jak można wybrać osie główne bryły w przypadku bryły o symetrii osiowej? Jak można powiązać mement pędu bryły określony względem punktu leżącego na osi obrotu oraz energię kinetyczną bryły w ruchu obrotowym z tensorem momentu bezwładności. Kiedy moment pędu bryły jest równoległy do wektora prędkości kątowej?
29. Równania Eulera dla bryły sztywnej. Zapisać postać tych równań dla swobodnej bryły sztywnej.