

Zadania projektowe.

Zadanie 1,2,3 do rozwiązania do 5 maja, zadania 4-12 do rozwiązania do 12 maja, zadania 13-31 do rozwiązania do 26 maja, zadania 32-33 do 3 czerwca.

Zadanie 1. (5 pkt.)

Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem $\vec{F} = \left(-\frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3}\right)\frac{\vec{r}}{r}$ gdzie α -stała dodatnia, β -stała. Wyznaczyć równanie toru ciała przy pomocy metod analitycznych zakładając iż parametr $\kappa = 1 - \frac{\beta m}{L^2} > 0$ (L -wartość momentu pędu ciała) zaś energia ciała $E < 0$. Jedną z dwóch stałych pojawiających się we wzorze określającym równanie toru uzależnić od wartości momentu pędu i energii ciała. Określić zmianę kąta φ w układzie biegunowym po którym ciało wraca do położenia początkowego. Kiedy ruch ciała jest periodyczny?

* Zadanie 2. (5 pkt.)

Rozważyć ruch ciała o masie m na które działa siła centralna:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^\beta} \frac{\vec{r}}{r}.$$

gdys stała $\alpha > 0$ (siła przyciągająca) dla następujących wartości parametru $\beta=2; 2.2; 1.8$.

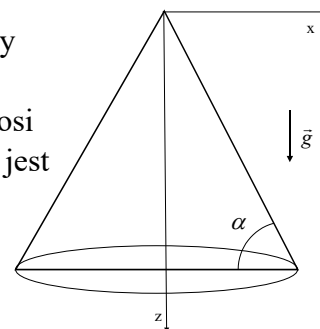
Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu przy pomocy metod numerycznych ruch ciała rozwiązując równania ruchu

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\alpha}{r^\beta}; mr^2\dot{\varphi} = L_z$$

Wykreślić postać zależności $r(t)$, $\varphi(t)$ oraz $r(\varphi)$, przedyskutować je oraz ewentualnie przedstawić symulacje ruchu ciała. Obliczenia wykonać dla różnych wartości energii ciała $E < 0$ i momentu pędu ciała $L \neq 0$ i zbadać wpływ zmian energii i momentu pędu na analizowany ruch. Przyjąć, iż $L_z = L$ oraz iż w chwili początkowej ruchu $t=0$ zachodzi $\dot{r} = 0$. Wartość r w chwili początkowej ruchu $t=0$ uzależnić od energii ciała i momentu pędu ciała korzystając z wzoru wiążącego całkowitą energię ciała z wielkościami r , $\dot{r}$ oraz L : $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ gdzie $V(r)$ oznacza potencjał (energie potencjalną). Określić zmianę kąta φ po której układ znajdzie się w takiej samej odległości od początku układu współrzędnych jak w chwili początkowej. Można przyjąć iż $m=1\text{kg}$, $\alpha=1\text{Nm}^\beta$ lub też obliczenia wykonać w zmiennych bezwymiarowych, co jest równoważne przyjęciu iż $m=1$, $\alpha=1$ jeżeli odległości mierzymy w jednostkach r_0 , czas mierzymy w jednostkach $\left(\frac{mr_0^{\beta+1}}{\alpha}\right)^{1/2}$, prędkości mierzymy w jednostkach

$\left(\frac{\alpha}{mr_0^{\beta-1}}\right)^{1/2}$, moment pędu mierzymy w jednostkach $(\alpha mr_0^{3-\beta})^{1/2}$ zaś energie w jednostkach $\left(\frac{\alpha}{r_0^{\beta-1}}\right)$.

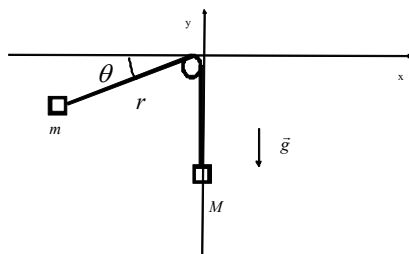
***Zadanie 3. (5 pkt.)** Ciało (punkt materialny) o masie m porusza się w polu siły ciężkości po powierzchni bocznej stożka, którego podstawa leży na poziomej powierzchni. Wiadomo, iż kąt między podstawą stożka, a tworzącą stożka wynosi α . Stożek znajduje się w polu siły ciężkości działającej pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .



- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a i napisać równania Lagrange'a II rodzaju. Jako współrzędne uogólnione przyjąć dwie z trzech współrzędnych w sferycznym układzie współrzędnych czyli współrzędne r oraz φ . (2 pkt.)
- 2) Rozwiązać przy pomocy metod numerycznych znalezione równania znajdując zależność przyjętych współrzędnych uogólnionych od czasu. Wykreślić zależności $r(t)$, $\varphi(t)$ oraz $r(\varphi)$ i je przedyskutować. Przyjąć, iż $\varphi(t=0) = 0$. Zbadać wpływ zmiany energii E i rzutu momentu pędu ciała na oś pionową L_z oraz znaku wielkości $\dot{r}$ w chwili początkowej ruchu na ruch układu dla ustalonego $r(t=0)$. Wartości wielkości $\dot{r}$ (z dokładnością do znaku) oraz $\dot{\varphi}$ w chwili początkowej ruchu $t=0$ można uzależnić od E i L_z dla ustalonego $r_0 = r(t=0)$ wykorzystując wzory wyrażające całkowitą energię i rzut momentu pędu na oś pionową. W obliczeniach przyjąć, iż $m=1\text{kg}$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (3 pkt.)

***Zadanie 4 (5 pkt.)**

Rozważyć dwa ciała (punkty materialne) o masach m i M odpowiednio połączone nieważką i nierozciągliwą nicią o długości l przechodzącą przez nieruchomy bloczek o pomijalnie małym promieniu. Założyć, iż nić może ślizgać się wokół bloczka bez tarcia. Ponadto odcinek nici łączący bloczek z ciałem o masie M zachowuje zawsze kierunek pionowy zaś odcinek łączący bloczek z ciałem o masie m tworzy w czasie ruchu z osią poziomą zmienny w czasie kąt θ .



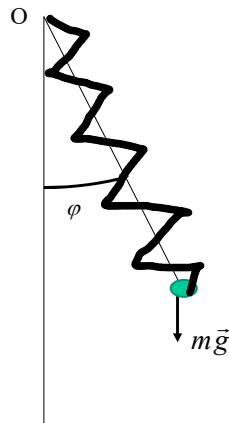
- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a dla tego układu obierając jako współrzędne uogólnione odległość r ciała o masie m od bloczka oraz kąt θ .

- 2) Znaleźć równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu (2 pkt.).
- 3) Rozwiązać otrzymany układ równań przy pomocy metod numerycznych zakładając iż w chwili początkowej oba ciała pozostawały w spoczynku, zaś kąt $\theta = 0$. Wykreślić zależność wielkości r oraz θ od czasu. Ewentualnie przedstawić symulacje ruchu układu. Zbadać wpływ zmiany stosunku obu mas na ruch układu ciał. W jakich przypadkach podczas ruchu ciała żadne z ciał nie osiągnie początku układu współrzędnych? (3 pkt.).

***Zadanie 5 (5 pkt.)**

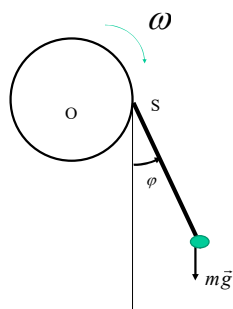
Ciało o masie m zamocowano za pomocą nieważkiej sprężyny o stałej sprężystości k do początku układu współrzędnych. Długość sprężyny w stanie w której sprężyna nie jest ściśnięta ani rozciągnięta jest równa l . Ciało to może poruszać się w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości oraz siły sprężystości.

- 1) Znaleźć równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch ciała umieszczonego na końcu sprężyny (2 pkt.).
- 2) Znaleźć położenie równowagi ciała
- 3) Rozwiązać numerycznie otrzymane równania dla wybranych warunków początkowych ruchu, zakładając iż w chwili początkowej ciało spoczywało. Zbadać jak na ruch układu wpływa zmiana warunków początkowych ruchu (w szczególności zanalizować warunki początkowe ruchu bliskie położeniu równowagi) (3 pkt.).



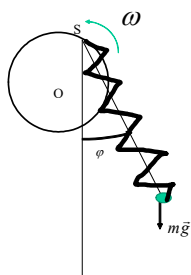
***Zadanie 6 (5 pkt.)**

Punkt zawieszenia wahadła matematycznego o długości l i masie m umieszczono na krawędzi koła o promieniu R , które obraca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W chwili $t=0$ punkt zawieszenia wahadła S znajdował się na tej samej wysokości co środek koła na prawo od niego.



Traktując kąt φ pokazany na rysunku jako współzrzedną uogólnioną znaleźć równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch wahadła (2 pkt.). Rozwiązać numerycznie otrzymane równanie przy założeniu iż wahadło w chwili początkowej jest nieznacznie odchylone od pionu oraz $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ dla następujących parametrów $l=1\text{m}$, $\omega = 1.2\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\omega = 0.6\sqrt{\frac{g}{l}}$ oraz $\omega = 0.4\sqrt{\frac{g}{l}}$ i $R = 0.2l$, $R = 0.5l$, $R = l$. Wykreślić zależność kąta φ od czasu dla rozważanych przypadków (3 pkt.). Ewentualnie przedstawić symulacje ruchu układu.

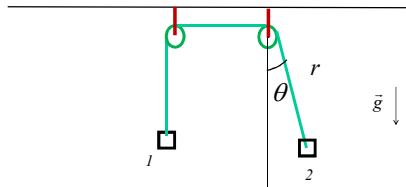
***Zadanie 7 (5 pkt.)**



Punkt zawieszenia nieważkiej sprężyny o stałej sprężystości k umieszczono na krawędzi koła o promieniu R , które obraca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. W stanie w którym sprężyna nie jest ściśnięta ani rozciągnięta jej długość wynosi l . Na końcu sprężyny umieszczono ciało o masie m . W chwili $t=0$ punkt zawieszenia wahadła S znajdował się na tej samej wysokości co środek koła na prawo od niego. Znaleźć równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch ciała umieszczonego na końcu sprężyny (2 pkt.). Rozwiązać numerycznie otrzymane równania dla wybranych warunków początkowych ruchu dla różnych wartości m , R , l i k (3 pkt.).

***Zadanie 8 (5 pkt.)**

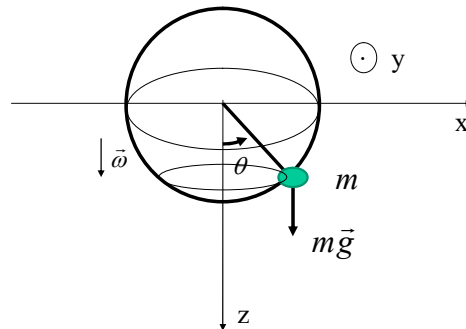
Dwa ciała o jednakowych masach $m_1=m_2=m$ każde znajdują się na końcu nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości l przerzuconej przez układ złożony z dwóch nieobracających się bloczków. Tarcie nici o bloczki pomijamy. Ciało pierwsze może poruszać się tylko w kierunku pionowym a ciało drugie może poruszać się płaszczyźnie pionowej. Na oba ciała działa siła ciężkości



- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a i równania Lagrange'a II rodzaju przyjmując za współrzędne uogólnione odległość ciała 2 od bloczka r oraz kąt θ jaki nić na końcu której znajduje się to ciało tworzy z kierunkiem pionowym.
- 2) Rozwiązać przy pomocy metod numerycznych te równania zakładając iż w chwili początkowej oba ciała spoczywają, zaś kąt θ jest różny od zera, choć niewielki i wykreślić zależność obu współrzędnych uogólnionych od czasu. Jak zmiana kąta θ w chwili początkowej ruchu wpływa na ruch układu, w szczególności średnie przyspieszenie z jakim porusza się ciało 1.

Zadanie 9 (5 pkt.)

Ciało o masie m porusza się po okręgu o promieniu R położonym w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół wzdłuż osi Oz . Dodatkowo okrąg obraca się wokół osi Oz z prędkością kątową ω



- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i napisać równania Lagrange'a II rodzaju (1 pkt.).
- 2) Znaleźć położenia równowagi, w których ciało umieszczone bez prędkości początkowej będzie spoczywało w układzie związanym z okręgiem. W szczególności pokazać iż jednymi z położen równowagi są punkty dla których $\theta = \theta_m$, określone równaniem

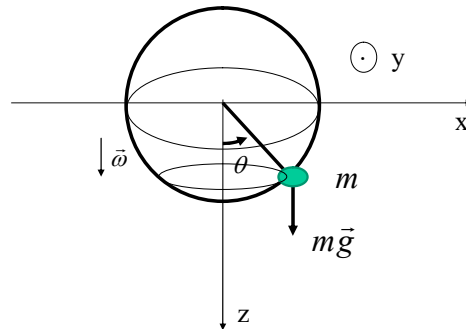
$$\cos(\theta_m) = \frac{g}{R\omega^2} \text{ wówczas gdy } \omega > \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Jakie inne położenia ciała są położeniami równowagi? Określić dla nich wartość θ_m (1 pkt).

- 3) Określić w przybliżony sposób zachowanie się ciała umieszczonego w pobliżu takich punktów wprowadzając do opisu ruchu kąty $\tilde{\theta} = \theta - \theta_m$ o których założyć znajdując rozwiązanie przybliżone równań ruchu iż $\sin(\tilde{\theta}) \approx \tilde{\theta}$, $\cos(\tilde{\theta}) \approx 1$. Kiedy ciało nie będzie się oddalać od punktów określonych w punkcie 2? Określić częstość drgań układu wokół położenia równowagi (w ruchu analizowanym w układzie związanym z obracającym się okręgiem) gdy w trakcie drgań ciało pozostaje blisko tych położenia (3 pkt.)

***Zadanie 10 (5 pkt.)**

Ciało o masie m porusza się po okręgu o promieniu R położonym w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół wzdłuż osi Oz . Dodatkowo okrąg obraca się wokół osi Oz z prędkością kątową ω



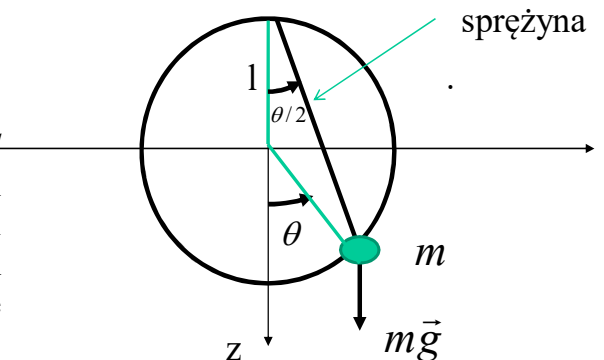
- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i napisać równanie Lagrange'a II rodzaju (1 pkt.).
- 2) Znaleźć położenia równowagi, w których ciało umieszczone bez prędkości początkowej będzie spoczywało w układzie związanym z okręgiem. W szczególności pokazać iż jednymi z położenia równowagi są punkty dla których $\theta = \theta_m$, określone równaniem

$\cos(\theta_m) = \frac{g}{R\omega^2}$ wówczas gdy $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$. Jakie inne położenia ciała są położeniami równowagi? Określić dla nich wartość θ_m (1 pkt.).

- 3) Rozwiązać numerycznie równanie znalezione w punkcie 1) dla różnych odległości ciała od wyznaczonych położenia równowagi przyjmując np. iż $R=1\text{m}$. Rozważyć przypadek gdy $\omega = 0.5\sqrt{\frac{g}{R}}$ oraz $\omega = 1.5\sqrt{\frac{g}{R}}$. Dla każdego z rozważanych przypadków wykreślić zależność od czasu kąta θ pokazanego na rysunku (3 pkt.)

#Zadanie 11 (5 pkt.)

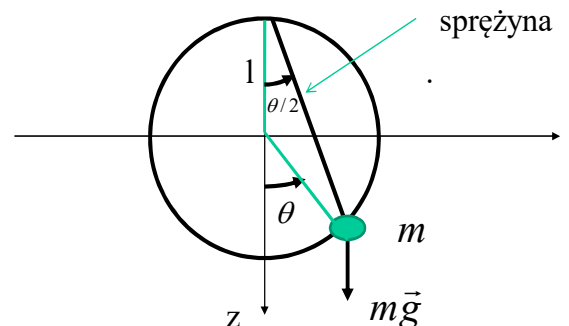
Ciało o masie m porusza się po okręgu o promieniu l położonym w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół wzdłuż osi Oz . Dodatkowo ciało to połączone z najwyższym punkcie na okręgu sprężyną, której długość w stanie równowagi jest również równa l .



- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i napisać równania Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współzrzedną uogólnioną kąt θ pokazany na rysunku (1 pkt.).
- 2) Znaleźć położenia równowagi, w których ciało umieszczone bez prędkości początkowej będzie spoczywało. W szczególności pokazać iż jednymi z położen równowagi są punkty dla których $\theta = \theta_m$, określone równaniem $\cos\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = \frac{1}{2\left(1 - \frac{mg}{kl}\right)}$ wówczas gdy $\frac{mg}{kl} < \frac{1}{2}$. Jakie inne położenie ciała odpowiada położeniu równowagi. Określić dla niego wartość θ_m (1 pkt.).
- 3) Określić w przybliżony sposób zachowanie się ciała pozostającego w trakcie ruchu w pobliżu położen równowagi, wprowadzając do opisu ruchu kąty $\tilde{\theta} = \theta - \theta_m$ o których założyć znajdując rozwiązanie przybliżone równań ruchu iż $\sin(\tilde{\theta}) \approx \tilde{\theta}$, $\sin\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \approx \frac{\tilde{\theta}}{2}$, $\cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \approx 1$. Wokół jakich punktów i przy jakich założeniach jest możliwy ruch ciała zachodzący w taki sposób iż ciało będzie wykonywać drgania pozostając stale w pobliżu położenia równowagi. W przypadku położenia równowagi innego od tych dla których $\cos\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = \frac{1}{2\left(1 - \frac{mg}{kl}\right)}$ rozważyć przypadki gdy $\frac{mg}{kl} < \frac{1}{2}$ oraz $\frac{mg}{kl} > \frac{1}{2}$. Określić częstość drgań ciała wokół położen równowagi gdy w trakcie drgań ciało pozostaje blisko położenia równowagi wykonując takie drgania (3 pkt.).

***Zadanie 12 (5 pkt.)**

Ciało o masie m porusza się po okręgu o promieniu l położonym w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół wzdłuż osi Oz. Dodatkowo ciało to połączone z najwyższym punkcie na okręgu sprężyną, której długość w stanie równowagi jest również równa l .



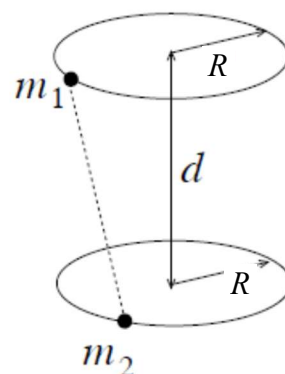
- 1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i napisać równania Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współzrzedną uogólnioną kąt θ pokazany na rysunku (1 pkt.).
- 2) Znaleźć położenia równowagi, w których ciało umieszczone bez prędkości początkowej będzie spoczywało. W szczególności pokazać iż jednymi z położen równowagi są punkty dla których $\theta = \theta_m$, określone równaniem $\cos\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = \frac{1}{2\left(1 - \frac{mg}{kl}\right)}$ wówczas gdy

$\frac{mg}{kl} < \frac{1}{2}$. Jakie inne położenie ciała odpowiada położeniu równowagi. Określić dla niego wartość θ_m (1 pkt.).

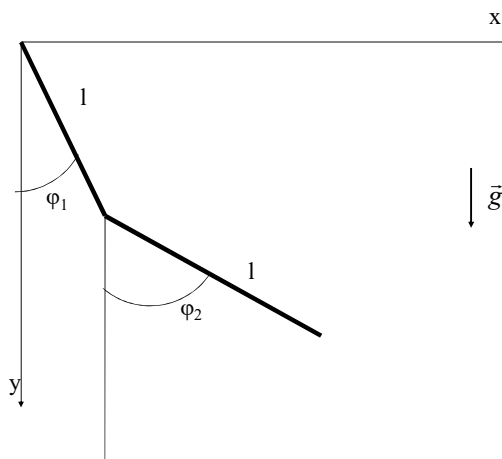
- 3) Rozwiązać numerycznie równanie znalezione w punkcie 1) w przypadku gdy ciało w chwili początkowej spoczywało w pobliżu położenia równowagi. Można przyjąć np. iż $m=1\text{kg}$, $l=1\text{m}$ i zbadać jak na ruch ciała wpływa zmiana stałej k . Rozważyć przypadki gdy $\frac{mg}{kl} < \frac{1}{2}$ oraz $\frac{mg}{kl} > \frac{1}{2}$. Dla każdego z rozważanych przypadków wykreślić zależność od czasu kąta θ pokazanego na rysunku. Wokół jakich położenia równowagi jest możliwy ruch ciała zachodzący w taki sposób iż ciało będzie wykonywać drgania R pozostając stale w pobliżu położenia równowagi? (3 pkt.)

***Zadanie 13 (5 pkt.).** Po dwóch gładkich, poziomych okręgach o promieniach R każdy, o środkach położonych na wspólnej osi pionowej w odległości d , poruszają się dwa ciała (punkty materialne) o masach m_1 oraz m_2 pod wpływem siły **przyciągającej** wprost proporcjonalnej do odległości r tych ciał od siebie o wartości $|\vec{F}| = kr$ działającej wzdłuż prostej przechodzącej przez położenia tych dwóch ciał (k -stała dodatnia).

- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przyjmując za współrzędne uogólnione wybrane współrzędne określające położenie każdego z ciał w cylindrycznym układzie z osią Oz prostopadłą do płaszczyzny okręgów.
- 2) Wyznaczyć wspólną częstość małych drgań obu ciał wokół punktów leżących na okręgach w których odległość między ciałami jest minimalna. Opisać zachowanie się punktów materialnych gdy w chwili początkowej oba ciała spoczywały i odległość między nimi była bliska minimalnej odległości między nimi (3 pkt.).
- 3) Zapisać ściśle równania Lagrange'a II rodzaju.
- 4) Rozwiązać otrzymane równania wykorzystując metody numeryczne i wykreślić zależności współrzędnych uogólnionych od czasu. Porównać otrzymane rozwiązania z tymi wyznaczonymi w sposób przybliżony w punkcie 2 (3 pkt.).



****Zadanie 14 (5 pkt.).** Rozważyć wahadło podwójne fizyczne złożone z dwóch cienkich jednorodnych prętów o długości l i masie m każdy

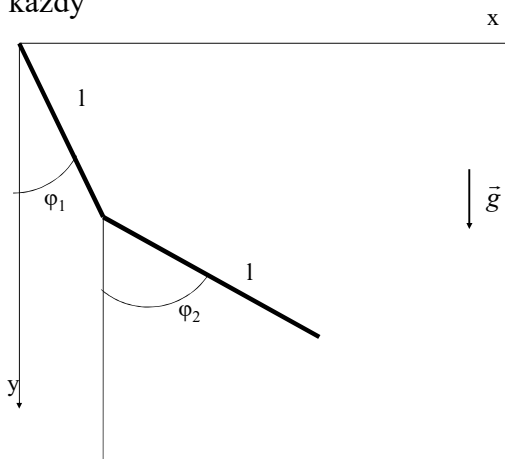


Koniec pierwszego pręta umocowany jest w nieruchomym początku układu współrzędnych, zaś początek drugiego pręta zamocowany jest do końca pierwszego pręta. Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół.

- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a dla opisywanego fizycznego wahadła podwójnego (1 pkt.)
- 2) Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju (1 pkt.).
- 3) Rozwiązać otrzymane równania wykorzystując metody numeryczne i wykreślić zależności kątów φ_1, φ_2 pokazanych na rysunku od czasu. W szczególności rozważyć przypadek w którym w chwili początkowej ruchu oba wahadła spoczywały w położeniu bliskim położeniu równowagi (3 pkt.).

Odp. Energia kinetyczna układu może być przedstawiona jako suma energii kinetycznej górnego wahadła w ruchu obrotowym wokół punktu zawieszenia, energii kinetycznej dolnego wahadła w ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez jego środek masy oraz energii kinetycznej w ruchu postępowym drugiego wahadła (poruszającego się w tym ruchu z prędkością z jakim porusza się środek masy drugiego wahadła).

Zadanie 15 (5 pkt.). Rozważyć wahadło podwójne fizyczne złożone z dwóch cienkich jednorodnych prętów o długości l i masie m każdy



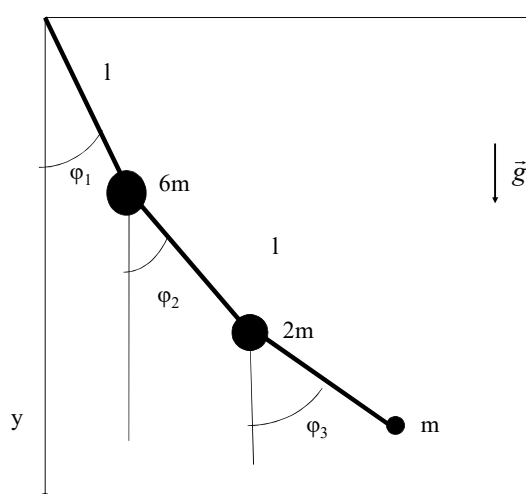
Koniec pierwszego pręta umocowany jest w nieruchomym początku układu współrzędnych, zaś początek drugiego pręta zamocowany jest do końca pierwszego pręta. Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół.

- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a dla opisywanego fizycznego wahadła podwójnego
- 2) Wyznaczyć częstości małych drgań tego układu i znaleźć ruch wahadeł w przybliżeniu małych drgań określając zależności kątów φ_1, φ_2 pokazanych na rysunku od czasu podczas ruchu. Jak należy wybrać warunki początkowe ruchu by wszystkie wahadła drgały z tą samą częstością?

Odp. Energia kinetyczna układu może być przedstawiona jako suma energii kinetycznej górnego wahadła w ruchu obrotowym wokół punktu zawieszenia, energii kinetycznej dolnego wahadła w ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez jego środek masy oraz energii kinetycznej w ruchu postępowym drugiego wahadła (poruszającego się w tym ruchu z prędkością z jakim porusza się środek masy drugiego wahadła).

****Zadanie 16 (5 pkt.).**

Rozważyć wahadło potrójne złożone z trzech ciał traktowanych jako punkty materialne zawieszonych na nieważkich, nierozciągliwych niciach (prętach) o jednakowych długościach.

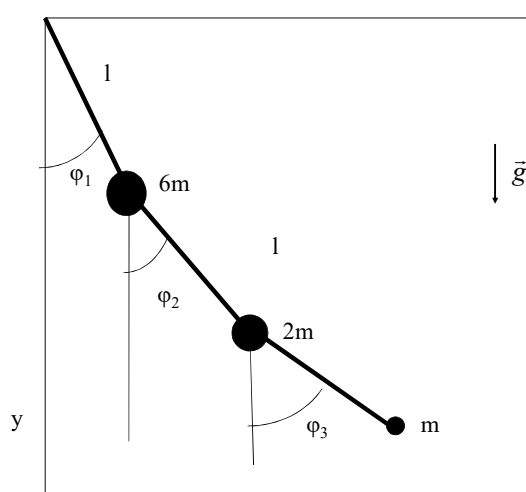


Pierwsza z nici (na końcu której znajduje się ciało o masie $6m$) umocowana jest w nieruchomym początku układu współrzędnych, zaś druga na końcu której znajduje się ciało o masie $2m$ zamocowana jest do ciała o masie $6m$. Ostatnia nić na końcu którego znajduje się ciało o masie m zamocowana jest do ciała o masie $2m$. Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół.

- 1) Znaleźć Funkcje Lagrange'a.
- 2) Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju (2 pkt.).
- 3) Rozwiązać otrzymane równania wykorzystując metody numeryczne i wykreślić zależności kątów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pokazanych na rysunku od czasu. W szczególności rozważyć przypadek w którym w chwili początkowej ruchu wszystkie wahadła spoczywały w położeniu bliskim położenia równowagi. (3 pkt.)

Zadanie 17 (5 pkt.).

Rozważyć wahadło potrójne złożone z trzech ciał traktowanych jako punkty materialne zawieszonych na nieważkich, nierozciągliwych niciach (prętach) o jednakowych długościach.



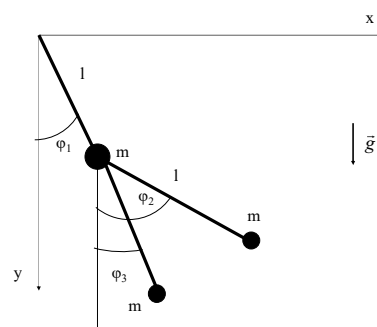
Pierwsza z nici (na końcu której znajduje się ciało o masie $6m$) umocowana jest w nieruchomym początku układu współrzędnych, zaś druga na końcu której znajduje się ciało o masie $2m$ zamocowana jest do ciała o masie $6m$. Ostatnia nić na końcu którego znajduje się ciało o masie m zamocowana jest do ciała o masie $2m$. Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół.

- 1) Znaleźć Funkcje Lagrange'a (1 pkt.)
- 2) Wyznaczyć częstości małych drgań opisanego wyżej wahadła potrójnego oraz znaleźć ruch układu w przybliżeniu małych drgań określając zależności kątów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pokazanych na rysunku od czasu podczas ruchu. Jak należy wybrać warunki początkowe ruchu by wszystkie wahadła drgały z tą samą częstością (ewentualnie jedno z wahadeł spoczywało)? (4 pkt.)

Zadanie 18. (5 pkt.)

Rozważyć wahadło potrójne złożone z dwóch wahadeł matematycznych o masie m i długości l , dołączonych do wahadła matematycznego o masie m i długości l . Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół.

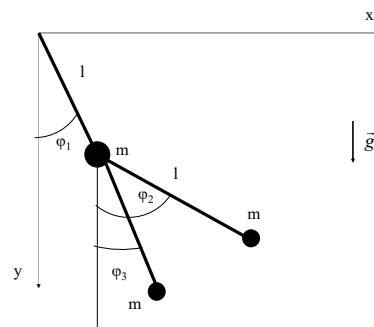
- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a. (1 pkt.)
- 2) Znaleźć częstości małych drgań opisanego wyżej wahadła potrójnego i wyznaczyć ruch wahadeł w przybliżeniu małych drgań określając zależności kątów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pokazanych na rysunku od czasu podczas ruchu. Jak należy wybrać warunki początkowe ruchu by wszystkie wahadła drgały z tą samą częstością (ewentualnie jedno z wahadeł spoczywało)? (4 pkt.)



**Zadanie 19. (5 pkt.)

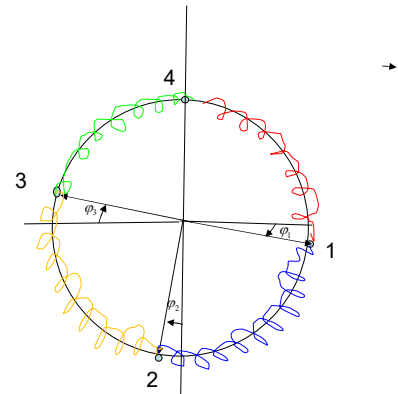
Rozważyć wahadło potrójne złożone z dwóch wahadeł matematycznych o masie m i długości l , dołączonych do wahadła matematycznego o masie m i długości l . Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości skierowanej pionowo w dół.

- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a.
- 2) Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju. (1 pkt.)
- 3) Rozwiązać otrzymane równania wykorzystując metody numeryczne i wykreślić zależności kątów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pokazanych na rysunku od czasu. W szczególności rozważyć przypadek w którym w chwili początkowej ruchu wszystkie wahadła spoczywały w położeniu bliskim położenia równowagi. (4 pkt.)



Zadanie 20 (5 pkt.). Cztery ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych m umieszczono na okręgu koła o promieniu R . Każde z ciał jest połączone ze swoimi sąsiadami na okręgu przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości k leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. Trzy ciała mogą poruszać się po okręgu, zaś ciało 4 jest nieruchome. W stanie równowagi ciała znajdują się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.

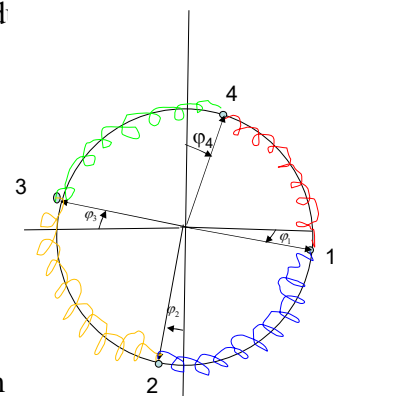
- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
- 2) Znaleźć częstości małych drgań układu (2 pkt.).
- 3) Znaleźć związek między przyjętymi współzrędnymi uogólnionymi a współzrędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współzrędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie (2 pkt.).
- 4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współzrędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie (1 pkt.).



Wsk. Wielkość wychylenia ciała z położenia równowagi można przybliżyć przez długość odpowiedniego wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości działających na ciała znajdujące się na końcu sprężyny o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współzrędnne uogólnione można przyjąć kąty φ_1 , φ_2 oraz φ_3 pokazane na rysunku.

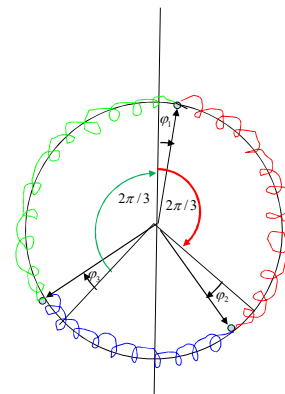
#Zadanie 21 (5 pkt.). Cztery ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych m mogą poruszać się po okręgu koła o promieniu R . Każde z ciał jest połączone ze swoimi sąsiadami na okręgu przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości k leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. W stanie równowagi ciała znajdą się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.

- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
- 2) Znaleźć częstość (częstości) małych drgań układu (2 pkt.).
- 3) Znaleźć związek między przyjętymi współzrędnymi uogólnionymi a współzrędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współzrędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie (2 pkt.).
- 4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współzrędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie (1 pkt.).



Wsk. Wielkość wychylenia ciała z położenia równowagi można przybliżyć przez długość odpowiedniego wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości działających na ciała znajdujące się na końcu sprężyny o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współzrędnne uogólnione można przyjąć kąty φ_1 , φ_2 oraz φ_3 oraz φ_4 pokazane na rysunku.

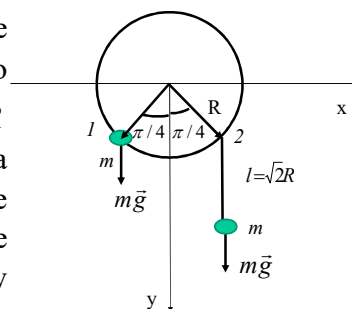
#Zadanie 22 (5 pkt.). Trzy ciała będące punktami materialnymi o jednakowych masach równych m mogą poruszać się po okręgu koła o promieniu R . Każde z ciał jest połączone ze swoimi sąsiadami na okręgu przy pomocy sprężynek o stałej sprężystości k leżących wzdłuż okręgu po którym poruszają się te ciała. W stanie równowagi ciała znajdują się w stałej i jednakowej odległości od swoich sąsiadów.



- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi.
- 2) Znaleźć częstość (częstości) małych drgań układu (2 pkt.).
- 3) Znaleźć związek między przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych. Dla znalezionej postaci funkcji Lagrange'a zapisać równania Lagrange'a II rodzaju i znaleźć ich ogólne rozwiązanie (2 pkt.).
- 4) Określić ogólną postać zależności od czasu wyjściowych współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie (1 pkt.).

Wsk. Wielkość wychYLENIA ciała z położenia równowagi można przybliżyć przez długość odpowiedniego wycinka okręgu po którym ciało się porusza. Zmiana długości sprężyny powoduje powstanie sił sprężystości działających na ciała znajdujące się na końcu sprężyny o wartości proporcjonalnej do zmiany długości sprężyny. Za współrzędne uogólnione można przyjąć kąty φ_1 , φ_2 oraz φ_3 pokazane na rysunku.

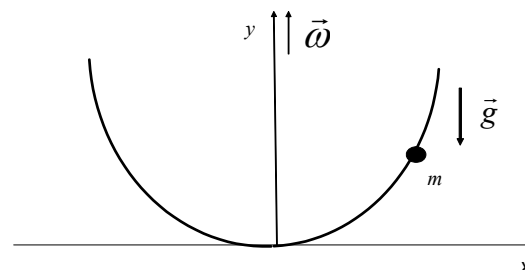
Zadanie 23 (5 pkt.). Z punktem 1 znajdującym się po okręgu o promieniu R powiązано ciało o masie m . Wektor wodzący tego punktu tworzy w trakcie ruchu stały kąt równy $\pi/2$ z wektorem wodzącym drugiego punktu, o pomijalnie małej masie. Do tego punktu doczepiono nić o długości $l = \sqrt{2}R$ na końcu której zwisa ciało o masie równej również m (rysunek obok). Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g . Za współrzędne uogólnione przyjąć takie wielkości które mogą opisywać jednoznacznie dowolne położenie układu zgodne z więzami i przyjmują wartość równą zero w położeniu równowagi pokazanym na rysunku.



- 1) Znaleźć energię kinetyczną i potencjalną układu jako funkcje współrzędnych uogólnionych i ich pochodnych po czasie w przybliżeniu małych drgań (2 pkt.).
- 2) Wyznaczyć częstości kołowe małych drgań układu. Określić ogólną postać zależności od czasu współrzędnych uogólnionych przy założeniu małych wychyleń ciał od położenia równowagi w trakcie ich ruchu. Przedyskutować otrzymane rozwiązanie (3 pkt.).

Zadanie 24 (5 pkt.)

Krzywa o równaniu $y = bx^4$ obraca się wokół pionowej osi Oy ze stałą prędkością kątową o wartości ω . Ciało o masie $m = 1\text{kg}$ może poruszać się bez oporów po tej krzywej. Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół.



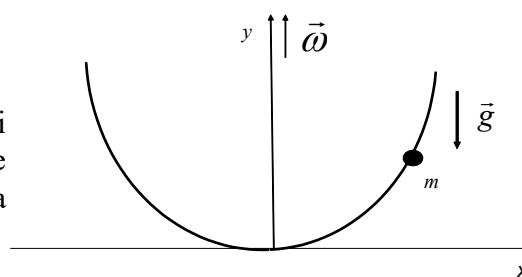
- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przyjmując jako współrzędną uogólnioną współrzędną x i zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju
- 2) Znaleźć położenia równowagi w układzie obracającym się czyli położenia w którym ciało umieszczone na krzywej, nie poruszające się względem niej w chwili początkowej, nie będzie zmieniać swego położenia względem krzywej w późniejszych chwilach czasu (2 pkt.).

- 3) Znaleźć przy pomocy metod analitycznych częstość małych drgań ciała wokół położenia odpowiadającego tak określonemu położeniu równowagi dla którego x nie jest równe 0 (3 pkt.).

Wsk (do punktu 2 i 3). Położeniu równowagi w układzie związanym z prostą odpowiada punkt o współrzędnej $x = x_0$ w którym $\ddot{x} = 0$ gdy dodatkowo $\dot{x} = 0$. W celu wyznaczenia częstości małych drgań funkcję Lagrange'a uzależnić od nowej współrzędnej uogólnionej $\tilde{x} = x - x_0$, a następnie znaleźć przybliżoną postać funkcji Lagrange'a pomijając wyrazy typu $\tilde{x}^m \tilde{x}^n$ gdy $m+n > 2$. W kolejnym kroku zapisać dla tej funkcji równanie Lagrange'a II rodzaju, znaleźć jego rozwiązanie odpowiadające drganiom harmonicznym i wyznaczyć częstość drgań.

***Zadanie. 25 (5 pkt.)**

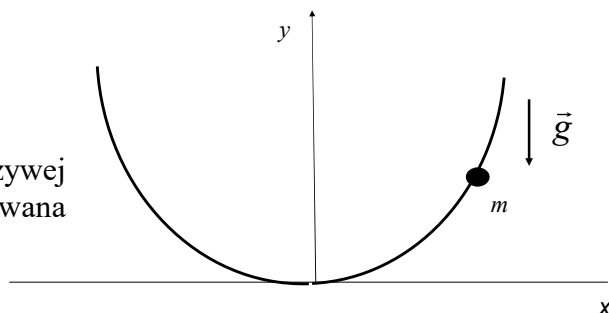
Krzywa o równaniu $y = bx^4$ obraca się wokół pionowej osi Oy ze stałą prędkością kątową o wartości ω . Ciało o masie $m = 1\text{ kg}$ może poruszać się bez oporów po tej krzywej. Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół.



- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a przyjmując jako współrzędną uogólnioną współrzędną x i zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju
- 2) Znaleźć położenia równowagi w układzie obracającym się czyli położenia w którym ciało umieszczone na krzywej, nie poruszające się względem niej w chwili początkowej, nie będzie zmieniać swego położenia względem krzywej w późniejszych chwilach czasu (2 pkt.).
- 3) Znaleźć przy pomocy metod numerycznych rozwiązanie ścisłego równania ruchu określonego jako równanie Lagrange'a II rodzaju dla kilku warunków początkowych ruchu przyjmując m.in. iż ciało w chwili początkowej spoczywało w układzie związanym z krzywą blisko znalezionych położen równowagi oraz $b = 1/\text{m}^3$, $\omega = 1/\text{s}$. (3 pkt.)

***Zadanie. 26 (5 pkt.)**

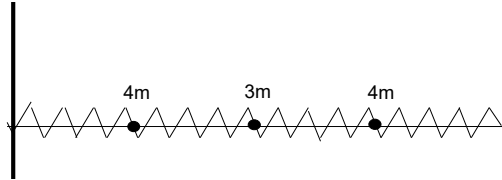
Ciało o masie $m = 1\text{ kg}$ porusza się po nieruchomej krzywej o równaniu $y = bx^2$. Na ciało działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół.



- 1) Znaleźć przy pomocy metod analitycznych częstość małych drgań ciała wokół położenia równowagi czyli położenia w którym ciało umieszczone na krzywej bez prędkości początkowej nie będzie zmieniać swego położenia w późniejszych chwilach czasu (2 pkt.).
- 2) Znaleźć przy pomocy metod numerycznych rozwiązanie ścisłego równania ruchu określonego jako równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując iż ciało w chwili początkowej spoczywało blisko znalezionego położenia równowagi. Obliczenia wykonać dla $b = 1$ i $b = 8$. (3 pkt.)

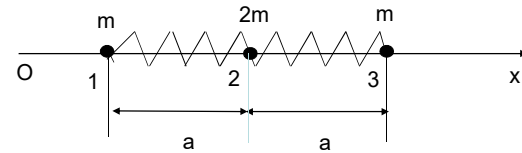
Zadanie 27 (5 pkt.).

Rozważyć układ złożony z 3 punktów materialnych o masach $4m$, $3m$ i $4m$ odpowiednio połączonych ze sobą oraz nieruchomymi ścianami przy pomocy sprężyn o stałej sprężystości k . W stanie równowagi pokazanym na rysunku długości wszystkich sprężyn są jednakowe i na punkty materialne nie działa żadna siła. Wydłużenie lub skrócenie dowolnej sprężyny wywołuje powstanie siły sprężystości spełniającej prawo Hooke'a. Zakładamy iż punkty materialne mogą poruszać się tylko w kierunku prostopadłym do ściany.



- 1) Znaleźć funkcje Lagrange'a układu przyjmując za współrzędne uogólnione wychylenie punktów z położenia równowagi.
- 2) Znaleźć możliwe częstości drgań własnych tego układu, zapisać ogólne rozwiązanie równań Lagrange'a II rodzaju oraz przedyskutować ruch ciał odpowiadający drganiom o znalezionych częstościach (3 pkt.).
- 3) Znaleźć związek między przyjętymi współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi normalnymi oraz zapisać funkcje Lagrange'a przy wykorzystaniu współrzędnych normalnych (2 pkt.).

Zadanie 28 (5 pkt.). Trzy punkty materialne mogą poruszać się po poziomej prostej. Punkty te połączone są między sobą za pomocą 2 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k , zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy nie jest ona naprężona jest równa a . Masa środkowego punktu materialnego jest równa $2m$, zaś masy pozostałych punktów są jednakowe i równe m .

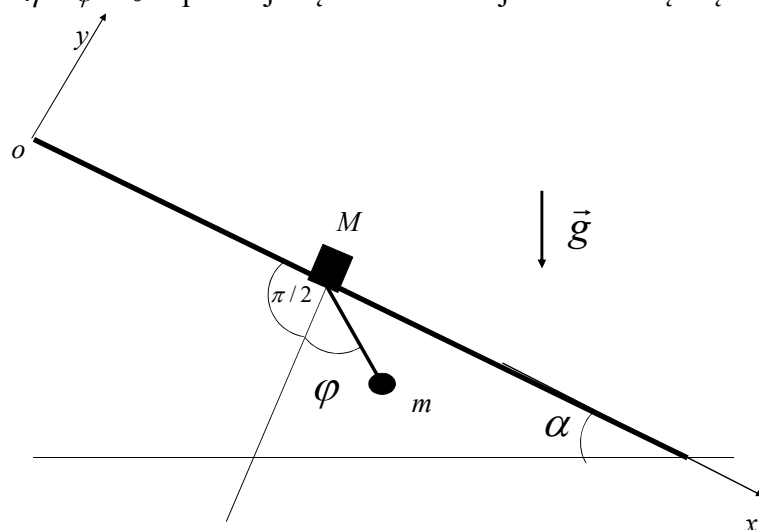


- 1) Przyjmując za współrzędne uogólnione wielkości $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 - a$ oraz $q_3 = x_3 - 2a$ (x_i – składowa x -owa wektora wodzącego i -tego ciała) znaleźć funkcję Lagrange'a.
- 2) Wyznaczyć częstości kołowe drgań układu.
- 3) Znaleźć zależność między współrzędnymi uogólnionymi q_1, q_2, q_3 a współrzędnymi normalnymi u_1, u_2, u_3 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych. Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych i je rozwiązać.

#Zadanie 29 (5 pkt.)

Do ciała o masie M , które może poruszać się bez tarcia po powierzchni gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu α , doczepiono na lince o długości l drugie ciało o masie m

- 1) Napisać funkcję Lagrange'a. Za współrzędne uogólnione można przyjąć kąt φ pokazany na rysunku oraz współrzędną x układu kartezjańskiego pokazanego na rysunku.
- 2) Znaleźć postać funkcji Lagrange'a zamieniając współrzędną x na współrzędną określoną wzorem $\eta = x - \frac{g \sin(\alpha) t^2}{2}$.
- 3) Zapisać równania Lagrange'a II rodzaju
- 4) Pokazać iż rozwiązania tych równań mają postać drgań zachodzących wokół położenia w którym $\eta = \varphi = 0$ o pewnej częstości kołowej. Określić tę częstość.



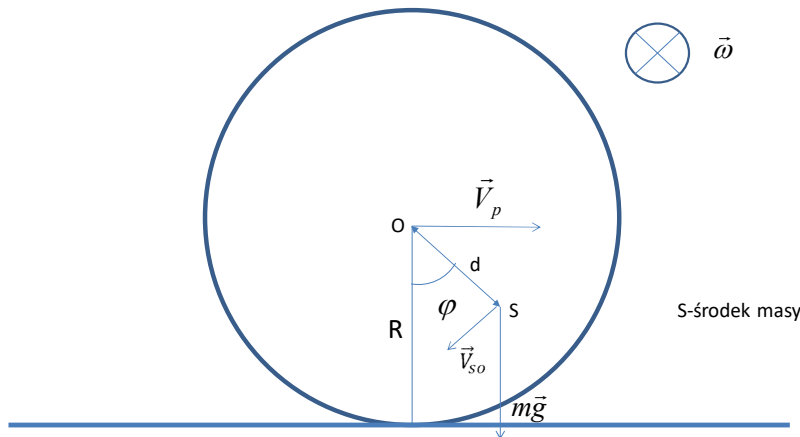
Zadanie 30 (5 pkt.). Promień świetlny przebiega pomiędzy dwoma punktami o współrzędnych $A = (x_A, y_A) = (0,0)$ oraz $B = (x_B, y_B) = (1,1)$ w ośrodku, w którym współczynnik załamania zależy od położenia zgodnie ze wzorem: $n(x) = \sqrt{\beta x + 1}$ gdzie β oznacza stałą dodatnią. Znaleźć posługując się rachunkiem wariacyjnym równanie krzywej, wzdłuż której rozchodzi się światło. Pokazać, iż kąt θ , jaki tworzy poszukiwana krzywa z osią Ox spełnia zależność $n(x) \sin \theta = \text{const}$.

Wsk. Pokazać iż czas propagacji światła pomiędzy punktami A i B po krzywej o równaniu

$$y = y(x) \text{ wyznacza wzór: } t = \frac{1}{c} \int_{x_A}^{x_B} n(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx \text{ gdzie } y' = \frac{dy}{dx}, c - \text{prędkość światła w}$$

próżni. Światło propaguje po krzywej, dla której czas propagacji jest minimalny. Parametry krzywej można podać specyfikując równania, które muszą spełniać.

Zadanie 31 (5 pkt.). Walec o masie m i promieniu R może toczyć się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie. Środek masy walca jest oddległy o d od osi obrotu, zaś moment bezwładności walca względem osi obrotu O jest równy I . Wyznaczyć częstość kołową małych drgań walca wokół położenia równowagi.



Wsk.

- 1) Energie kinetyczną walca można określić jako sumę energii kinetycznej w ruchu obrotowym wokół środka masy walca S oraz energii kinetycznej w ruchu postępowym zachodzącym z prędkością środka masy walca S . Prędkość punktu S można określić licząc sumę wektorową prędkości środka walca $\vec{V}_p$ oraz prędkości $\vec{V}_{so}$ punktu S związanej wyłącznie z jego ruchem po okręgu wokół punktu O zachodzącym z prędkością kątową ω równą prędkości kątowej walca w ruchu obrotowym ($|\vec{V}_{so}| = d|\omega|$). Moment bezwładności walca względem punktu S jest równa $I_S = I - md^2$. Ponadto $\omega = \dot{\varphi}$. Energia potencjalna walca w polu siły ciężkości jest taka jak energia potencjalna ciała o masie równego masie walca umieszczonego w środku masy walca S .
- 2) Znaleźć funkcje Lagrange'a przyjmując kąt φ za współzrzedną uogólnioną. Następnie znaleźć przybliżoną postać funkcji Lagrange'a dokonując w końcowym wzorze przybliżenia $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ a następnie dodatkowo pominąć w wyrażeniu końcowym wyraz proporcjonalny do $\varphi^2 \dot{\varphi}^2$ jako znacznie mniejszy od wyrazów proporcjonalnych do φ^2 lub $\dot{\varphi}^2$. Zapisać dla tej przybliżonej funkcji Lagrange'a równanie Lagrange'a II rodzaju i je rozwiązać wyznaczając częstość kołową drgań.

#Zadanie 32 (5 pkt.).

Cząstka o ładunku q poruszająca się po płaszczyźnie $z=0$ znajduje się w polu siły centralnej o potencjale $V = -\frac{\alpha}{r}$ oraz w stałym w czasie, słabym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ o kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny. Pole takie można opisać przez potencjał skalarny $\varphi = 0$ oraz potencjał wektorowy $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$.

- 1) Znaleźć funkcję Hamiltona opisującą tą cząstkę w biegunowym układzie współzrzednych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu ciała.
- 2) Znaleźć przybliżoną postać funkcji Hamiltona w której zakładając iż pole magnetyczne jest słabe zaniedbujemy wyrazy proporcjonalne do kwadratu indukcji pola B^2 (1 pkt.).
- 3) Posługując się tą postacią funkcji Hamiltona i formalizmem opartym na równaniach Hamiltona-Jacobiego

- a) Znaleźć postać równania wiążącego czas z odległością cząstki od początku układu współrzędnych o postaci: $t = \text{const} + \int g(r)dr$, przy czym funkcja $g(r)$ jest funkcją zależną od stałych ruchu.
- b) Znaleźć biegunowy układ odniesienia obracający się wokół osi Oz w którym jest możliwe analityczne określenie równania toru. Jaka jest częstość kołowa z jaką układ ten się obraca? (4 pkt.)

Zadanie 33 (5 pkt.). Sprawdzić przy wykorzystaniu nawiasów Poissona, że przekształcenie dane wzorami:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2)$$

$$p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2)$$

$$p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2)$$

jest przekształceniem kanonicznym.

- 1) Wyznaczyć w nowych zmiennych funkcję Hamiltona $\bar{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ oraz równania Hamiltona dla cząstki o ładunku q i masie m poruszającej się w płaszczyźnie $z=0$ w polu magnetycznym opisanym potencjałem wektorowym: $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$. Przyjąć, że $\omega = \frac{qB}{m}$.
- 2) Rozwiązać otrzymane równania i znaleźć ruch cząstki w wyjściowych zmiennych. Zinterpretować sens stałych pojawiających się w równaniach opisujących ruch cząstki.
Wsk. Jeżeli dane przekształcenie jest przekształceniem kanonicznym to również przekształcenie odwrotne jest przekształceniem kanonicznym.

- Zadania wymagające obliczeń numerycznych
- ** trudniejsze zadania wymagające obliczeń numerycznych (z wykorzystaniem np. programów rozwiązujących numerycznie układy równań różniczkowych
- # trudniejsze zadania bez wykorzystania metod numerycznych