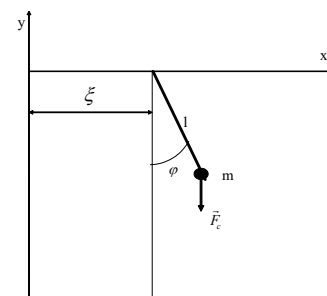


**Zadanie 9a (seria III).**

1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości  $l$  i masie  $m$  pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:  $\xi = A \sin(\Omega t)$  ( $A, \Omega$  - stałe)



Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt  $\varphi$  określający odchylenie nici wahadła od pionu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$ .

2) Wiadomo, że w chwili  $t=0$  punkt o masie  $m$  umieszczony na końcu nici spoczywał w punkcie o współzrzednych  $x(t=0) = 0, y(t=0) = -l$  ( $l$ -długość nici wahadła). Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu  $\varphi$  jest na tyle mały, że można założyć, że  $\sin(\varphi) \approx \varphi, \cos(\varphi) \approx 1$ .

3)-Znaleźć posługując się metodami numerycznymi ruch układu dla określonych powyżej warunków początkowych ruchu bez stosowania przybliżeń dla różnych wartości stałych  $A$  i  $\Omega$ . Przyjąć iż  $l=1\text{m}$ . Przedyskutować, kiedy znalezione ściśle rozwiązania ruchu są w przybliżeniu zgodne z rozwiązaniami przybliżonymi uzyskanymi przy założeniu iż kąt określający odchylenie nici od pionu pozostaje mały w trakcie ruchu.

Współzrzedną uogólnioną którą można przyjąć do opisu ruchu układu jest kąt  $\varphi$  jaki nic na którym wisi ciało o masie  $m$  tworzy z osią pionową.

Związek między współzrzednymi  $x, y$  określającymi w układzie kartezjańskim położenie punktu materialnego o masie  $m$  z współzrzedną uogólnioną ma postać:

$$x = A \sin(\Omega t) + l \sin \varphi \tag{1a}$$

$$y = -l \cos \varphi \tag{1b}$$

Z powyższych relacji wynikają związki:

$$\dot{x} = A\Omega \cos(\Omega t) + l \cos(\varphi)\dot{\varphi} \tag{2a}$$

$$\dot{y} = l \sin(\varphi)\dot{\varphi} \tag{2b}$$

Energia kinetyczna układu jest równa:  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ .

Uwzględniając relacje (2a) oraz (2b) łatwo można pokazać iż

$$T = \frac{m}{2} \left( A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + 2A\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi)\dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2 \right) \tag{3}$$



Energia potencjalna układu jest równa

$$V = mgy = -mgl \cos(\varphi) \tag{4}$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + 2A\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) + mgl \cos(\varphi)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mA\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) + ml^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -mA\Omega^2 l \sin(\Omega t) \cos(\varphi) - mA\Omega l \cos(\Omega t) \sin(\varphi) \dot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mA\Omega l \cos(\Omega t) \sin(\varphi) \dot{\varphi} - mgl \sin(\varphi)$$

to równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow -mA\Omega^2 l \sin(\Omega t) \cos(\varphi) + ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \cos(\varphi) \tag{5}$$

Można zauważyć iż pęd uogólniony  $p_\varphi$  jest równy

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mA\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) + ml^2 \dot{\varphi}$$

Nie jest on stałą ruchu bo funkcja Lagrange'a zależy jawnie od współrzędnej  $\varphi$  (nie jest ona współrzędną cykliczną)

Uogólniona energia jest równa

$$G = p_\varphi \dot{\varphi} - L =$$

$$= mA\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2} (A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + 2A\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) - mgl \cos(\varphi) =$$

$$= \frac{m}{2} (-A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + l^2 \dot{\varphi}^2) - mgl \cos(\varphi)$$

Widać iż  $G \neq T + V$  Wynika to z faktu iż relacja (1a) zależy jawnie od czasu.

Uogólniona energia nie jest stałą ruchu gdyż funkcja Lagrange'a zależy jawnie od czasu  $\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = mA^2 \Omega^3 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) + mA l \Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \neq 0$





W przypadku gdy odchylenie nici od pionu w trakcie ruchu ciała pozostaje małe to wówczas można wprowadzić przybliżenia:

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \quad \cos(\varphi) \approx 1$$

Po wykonaniu tych przybliżeń równanie (5) przyjmuje postać

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \quad (6)$$

$$\text{gdzie } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$  można zapisać w postaci:

$$\varphi_{og} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Gdy  $\omega^2 \neq \Omega^2$  rozwiązanie szczególne równania pełnego poszukujemy w postaci:

$$\varphi_{sz} = D_1 \cos(\Omega t) + D_2 \sin(\Omega t) \quad (7)$$

Po wstawieniu wzoru (7) do równania (6) otrzymujemy, iż:

$$-D_1 \Omega^2 \cos(\Omega t) - D_2 \Omega^2 \sin(\Omega t) + D_1 \omega^2 \cos(\Omega t) + D_2 \omega^2 \sin(\Omega t) = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \quad (8)$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla dowolnego czasu  $t$  z czego wynika po przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy  $\cos(\Omega t)$  oraz  $\sin(\Omega t)$  po obu stronach równania (8) iż:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{\Omega^2 A}{l(\omega^2 - \Omega^2)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (6) w postaci:

$$\varphi = \varphi_{og} + \varphi_{sz} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\Omega^2}{l(\omega^2 - \Omega^2)} A \sin(\Omega t) \quad (9)$$

Z warunku początkowego  $x(t=0) = 0$  i równania (1a) wynika, iż jeżeli  $\varphi(t=0)$  jest małe to  $\varphi(t=0) = 0$ .

Ponieważ z równania (9) wynika iż  $\varphi(t=0) = C_1$  to wynika stąd iż stała  $C_1 = 0$ .

Z warunku początkowego  $\dot{x}(t=0) = 0$  oraz równania (2a) przy uwzględnieniu tego iż  $\varphi(t=0) = 0$  wynika iż

$$\dot{\varphi}(t=0) = -\frac{A\Omega}{l} \quad (10)$$

Z drugiej strony z równania (9) wynika iż



$$\dot{\varphi} = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) + \frac{\Omega^3}{(\omega^2 - \Omega^2)l} A \cos(\Omega t) \quad (11)$$

a zatem

$$\dot{\varphi}(t=0) = C_2 \omega + \frac{\Omega^3}{(\omega^2 - \Omega^2)l} A \quad (12)$$

Z porównania relacji (10) i (12) wynika, że:

$$C_2 \omega + \frac{\Omega^3 A}{(\omega^2 - \Omega^2)l} = -A \frac{\Omega}{l} \quad \text{czyli} \quad C_2 = -\frac{A\Omega}{l\omega} \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right] = -\frac{A\omega\Omega}{l(\omega^2 - \Omega^2)}$$

Uwzględniając to otrzymujemy, iż:

$$\varphi(t) = \frac{A\Omega^2}{l(\omega^2 - \Omega^2)} \left[ \sin(\Omega t) - \frac{\omega}{\Omega} \sin(\omega t) \right] \quad (13)$$

Gdy  $\omega = \Omega$  rozwiązanie szczególne równania pełnego poszukujemy w postaci:

$$\varphi_{sz} = D_1 t \cos(\Omega t) + D_2 t \sin(\Omega t) \quad (14)$$

Po wstawieniu rozwiązania (14) do równania (6) uwzględniając iż  $\omega = \Omega$  oraz

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{sz} &= D_1 \cos(\Omega t) + D_2 \sin(\Omega t) - D_1 t \Omega \sin(\Omega t) + D_2 t \Omega \cos(\Omega t) \\ \ddot{\varphi}_{sz} &= -2D_1 \Omega \sin(\Omega t) + 2D_2 \Omega \cos(\Omega t) - D_1 t \Omega^2 \cos(\Omega t) - D_2 t \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

otrzymujemy, iż:

$$\begin{aligned} -D_1 t \Omega^2 \cos(\Omega t) - D_2 t \Omega^2 \sin(\Omega t) - 2D_1 \Omega \sin(\Omega t) + 2D_2 \Omega \cos(\Omega t) + D_1 \Omega^2 t \cos(\Omega t) + \\ D_2 \Omega^2 t \sin(\Omega t) = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (15)$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla dowolnego czasu  $t$  z czego wynika po przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy  $\cos(\Omega t)$  oraz  $\sin(\Omega t)$  po obu stronach równania (15) iż:

$$D_1 = -\frac{A\Omega}{2l}, D_2 = 0$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (6) w postaci:

$$\varphi = \varphi_{og} + \varphi_{sz} = C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t) - \frac{A\Omega t}{2l} \cos(\Omega t) \quad (16)$$

Z warunku początkowego  $x(t=0) = 0$  i równania (1a) wynika, iż:  $\varphi(t=0) = 0$ .

Ponieważ z równania (16) wynika iż  $\varphi(t=0) = C_1$  to wynika stąd iż stała  $C_1 = 0$ .

Z warunku początkowego  $\dot{x}(t=0) = 0$  oraz równania (2a) wynika iż

$$\dot{\varphi}(t=0) = -\frac{A\Omega}{l} \quad (17)$$



Z drugiej strony z równania (16) wynika iż

$$\dot{\varphi} = -C_1 \Omega \sin(\Omega t) + C_2 \Omega \cos(\Omega t) + \frac{A \Omega^2 t}{2l} \sin(\Omega t) - \frac{A \Omega}{2l} \cos(\Omega t) \quad (18)$$

a zatem

$$\dot{\varphi}(t = 0) = C_2 \Omega - \frac{A \Omega}{2l} \quad (19)$$

Z porównania relacji (17) i (19) wynika, że:

$$C_2 = -\frac{A}{2l}$$

Uwzględniając to otrzymujemy, iż:

$$\varphi = -\frac{A}{2l} \sin(\Omega t) - \frac{A \Omega t}{2l} \cos(\Omega t) \quad (20)$$

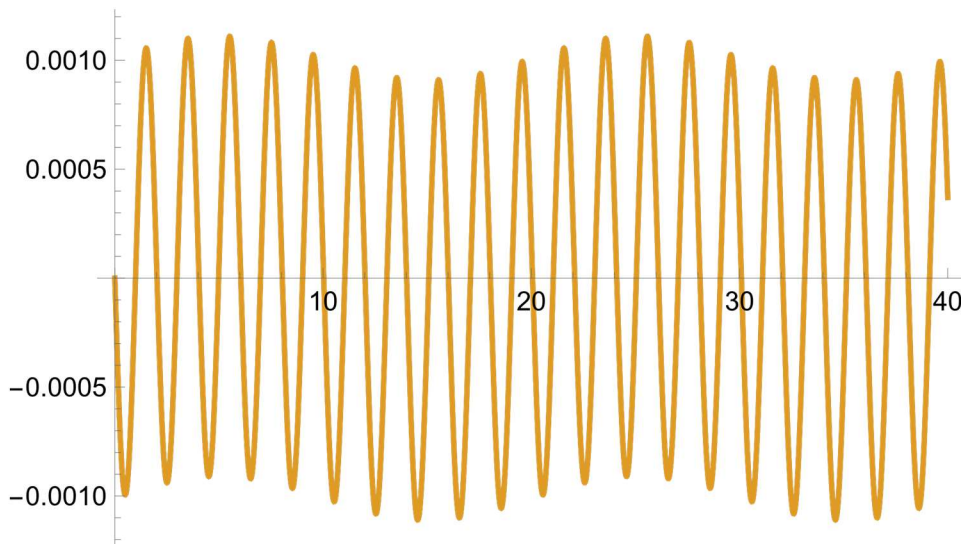
Powyższe rozwiązanie wskazuje na znaczący wzrost z czasem kąta  $\varphi$  a więc nie jest zgodne dla odpowiednio dużych czasów z zastosowanym przy formułowaniu rozwiązywanego równania przybliżeniem w myśl którego kąt  $\varphi$  pozostaje cały czas mały podczas ruchu.

Na poniższych rysunkach zaznaczono zależność kąta  $\varphi$  od czasu

- a) otrzymane w oparciu o wzór (13) (lub 20 gdy  $\omega = \Omega$ ) będący wzorem przybliżonym (linia niebieska)
  - b) otrzymane w oparciu o ściśle rozwiązanie równania ruchu (5) (linia żółta)
- Na rysunkach na których nie widać linii niebieskiej krzywa ta pokrywa się z linią żółtą

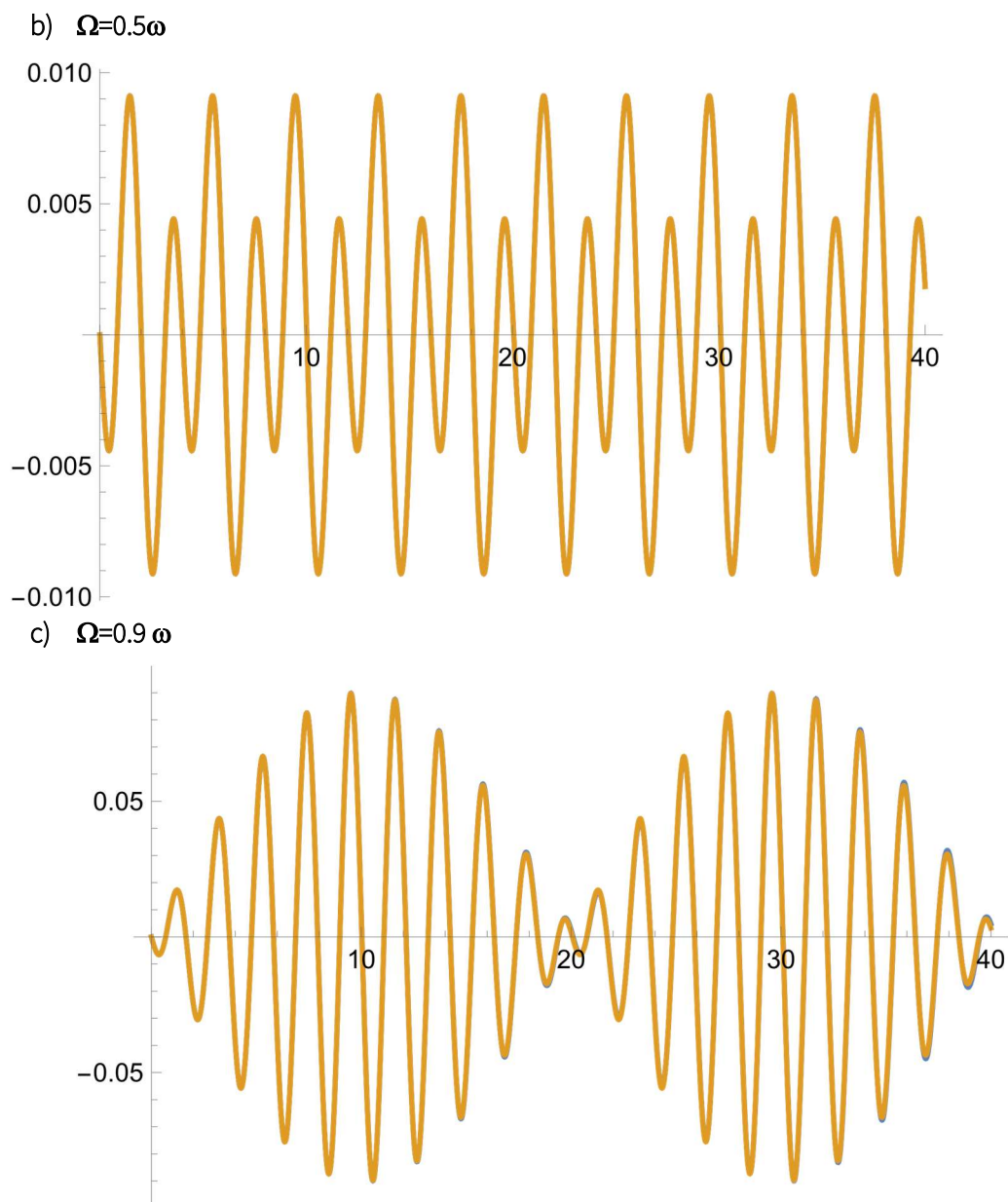
I) dla  $l=1m$  i  $A=0.01m$  dla różnych  $\Omega$

a)  $\Omega=0.1\omega$

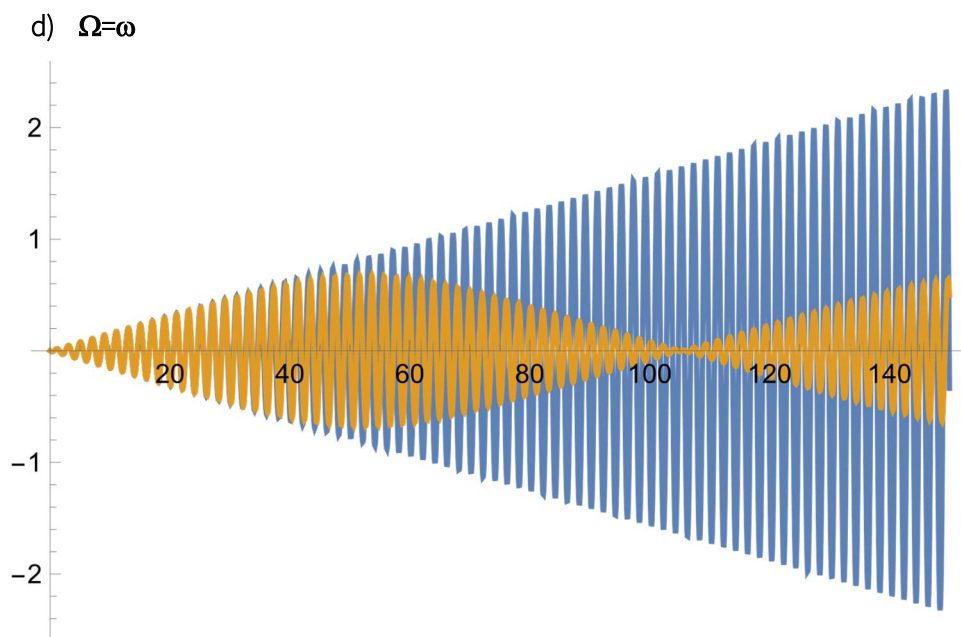


Złożenie drgań o częstotliwości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstotliwości  $\omega$  zachodzą z większą amplitudą

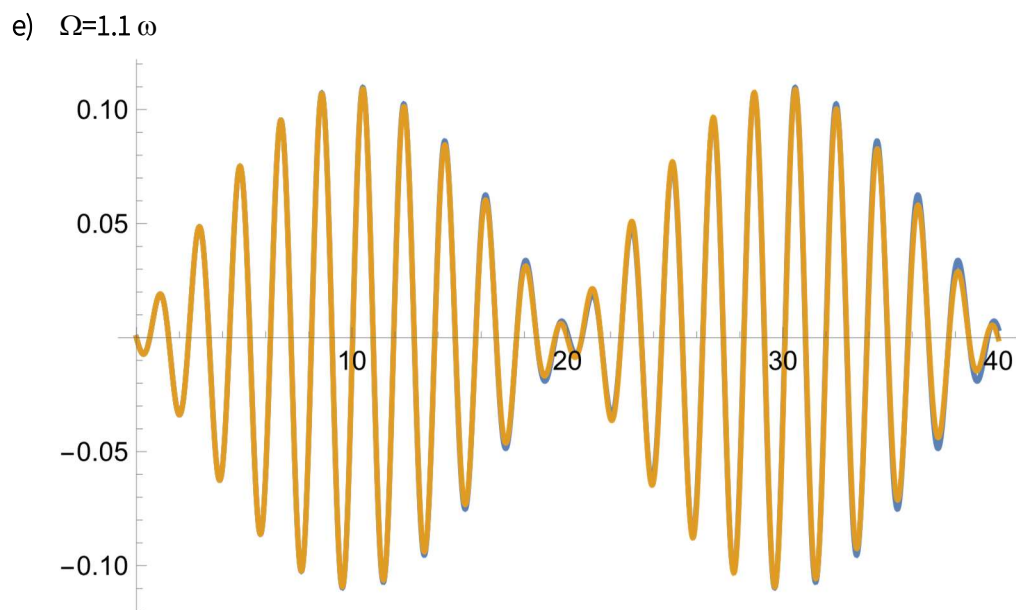




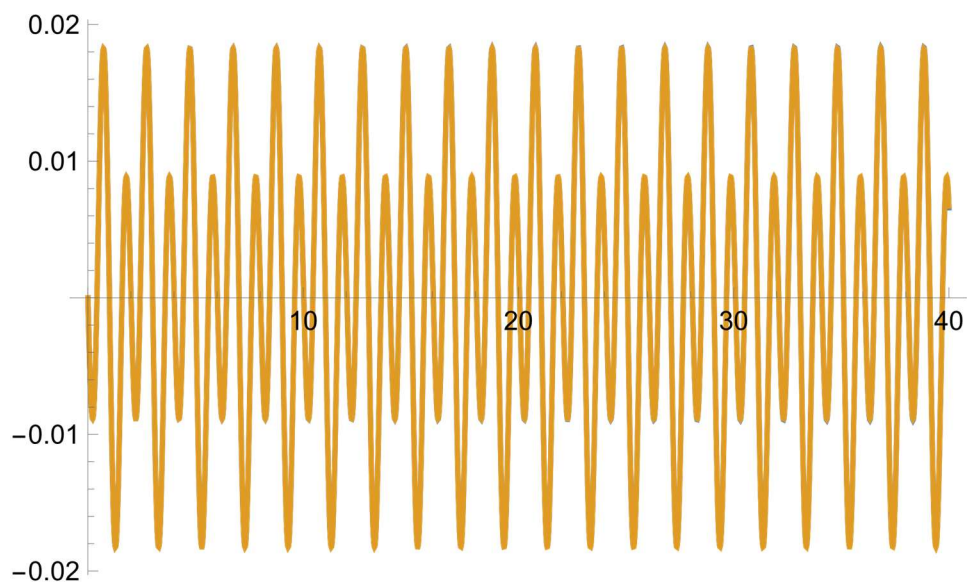
Obserujemy zachowanie zbliżone do dudnienia



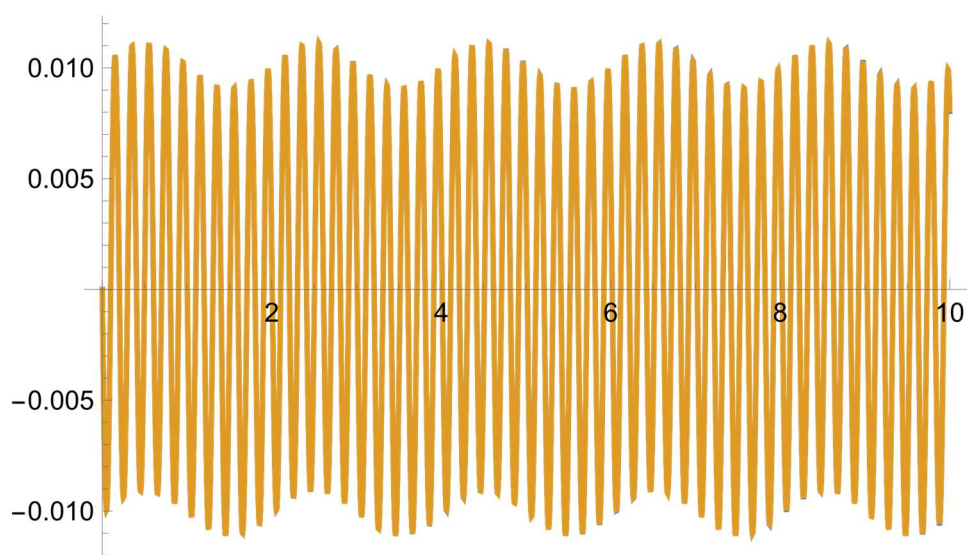
Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta  $\varphi$  i nie może opisywać zachowania układu



f)  $\Omega=2\omega$



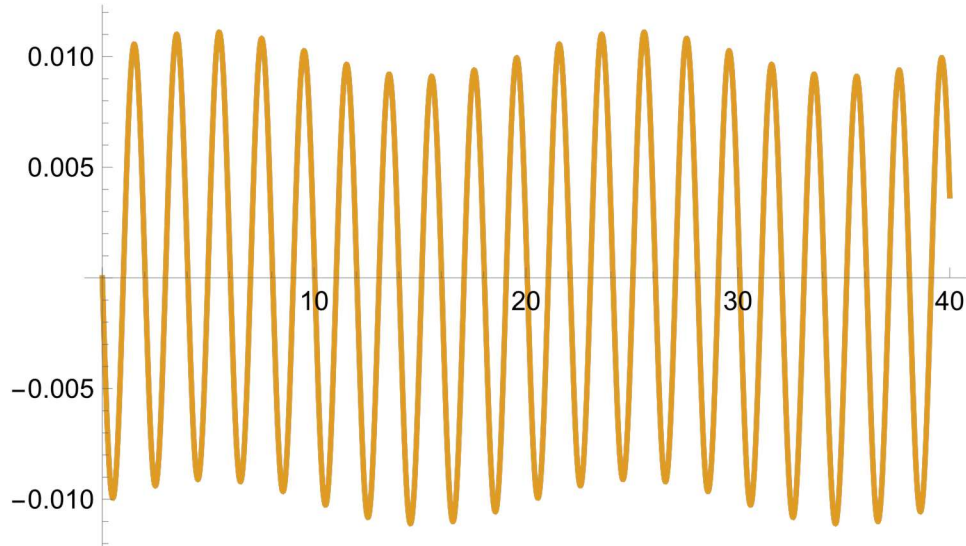
g)  $\Omega=10\omega$  (zmiana skali)



Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\Omega$  zachodzą z większą amplitudą.

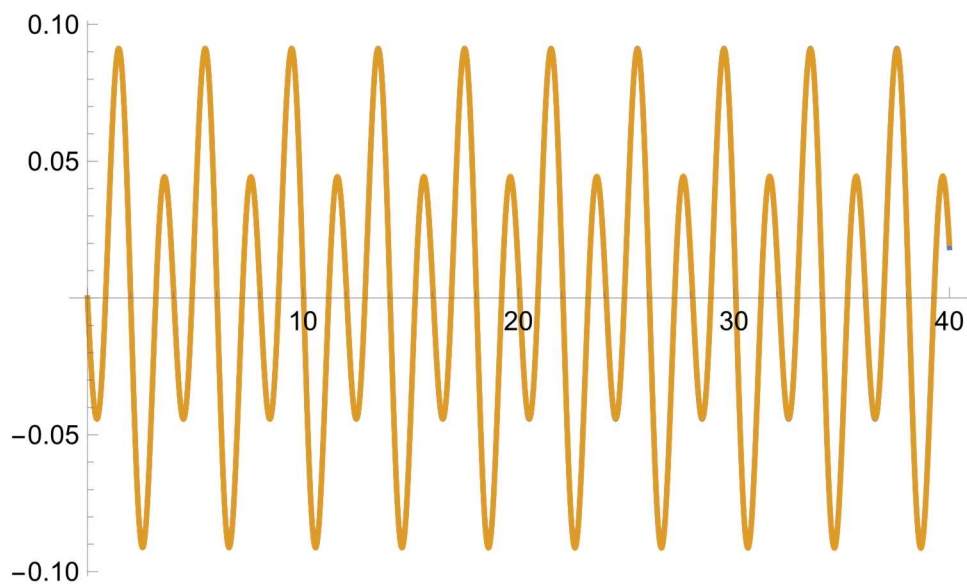
II) dla  $l=1\text{m}$  i  $A=0.1\text{m}$  dla różnych  $\Omega$

a)  $\Omega=0.1\omega$



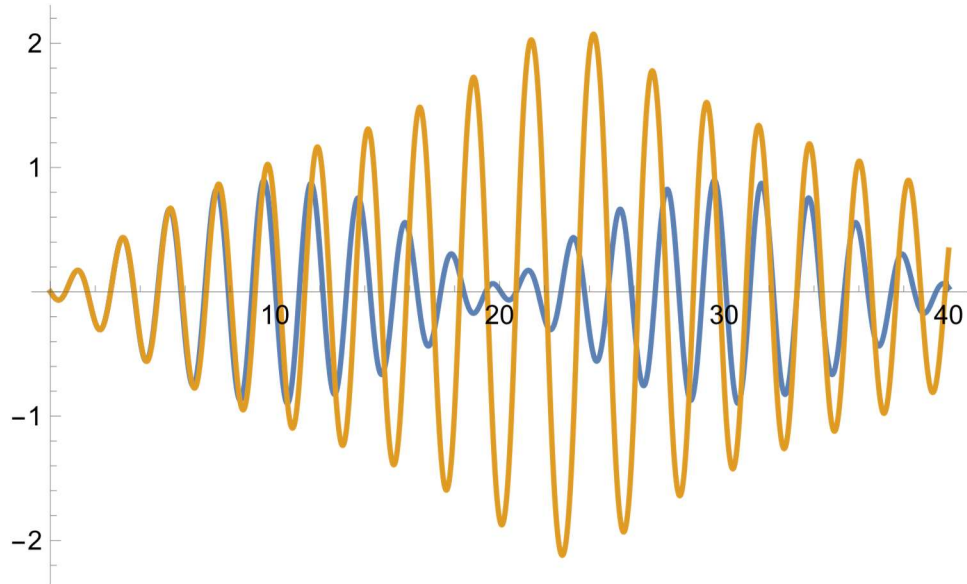
Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\omega$  zachodzą z większą amplitudą.

b)  $\Omega=0.5\omega$



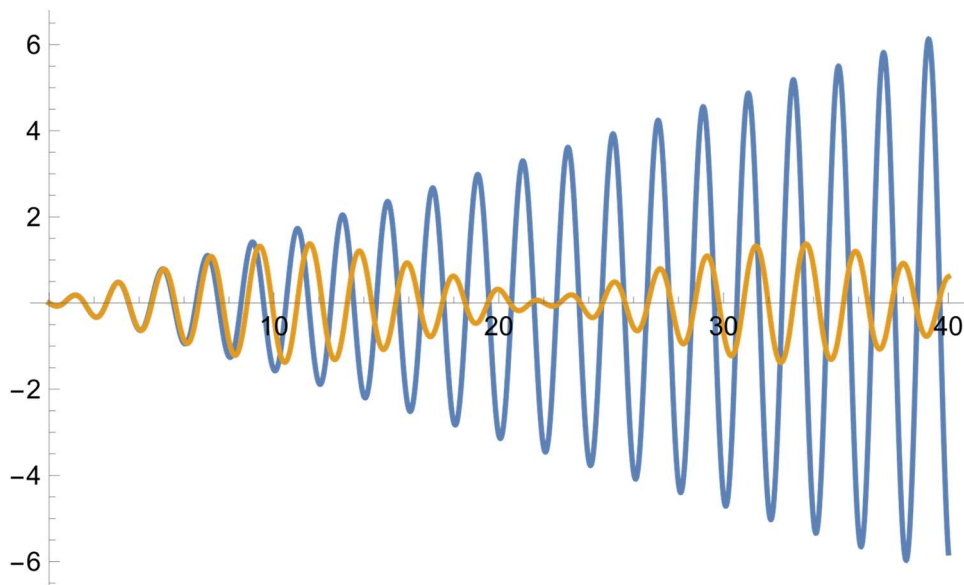


c)  $\Omega = 0.9 \omega$

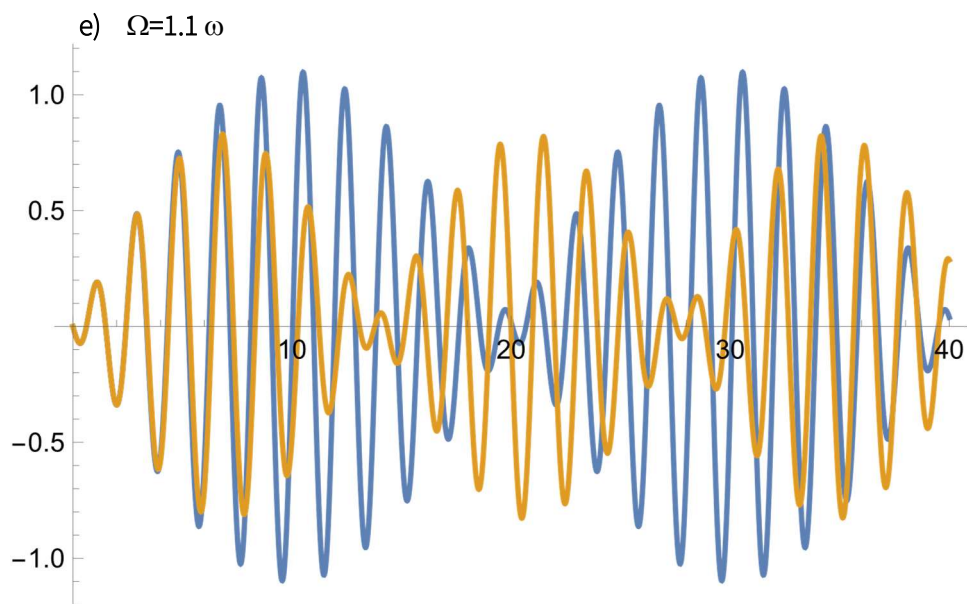


Widać znaczne różnice między rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym. Kat  $\varphi$  osiąga znaczące wartości

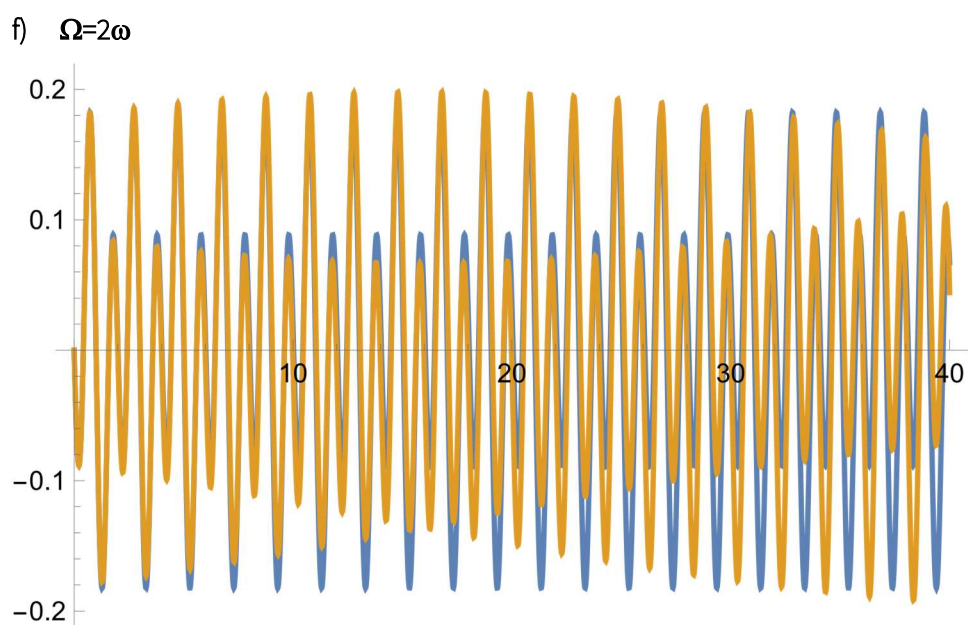
d)  $\Omega = \omega$



Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta  $\varphi$  i nie może opisywać zachowania układu



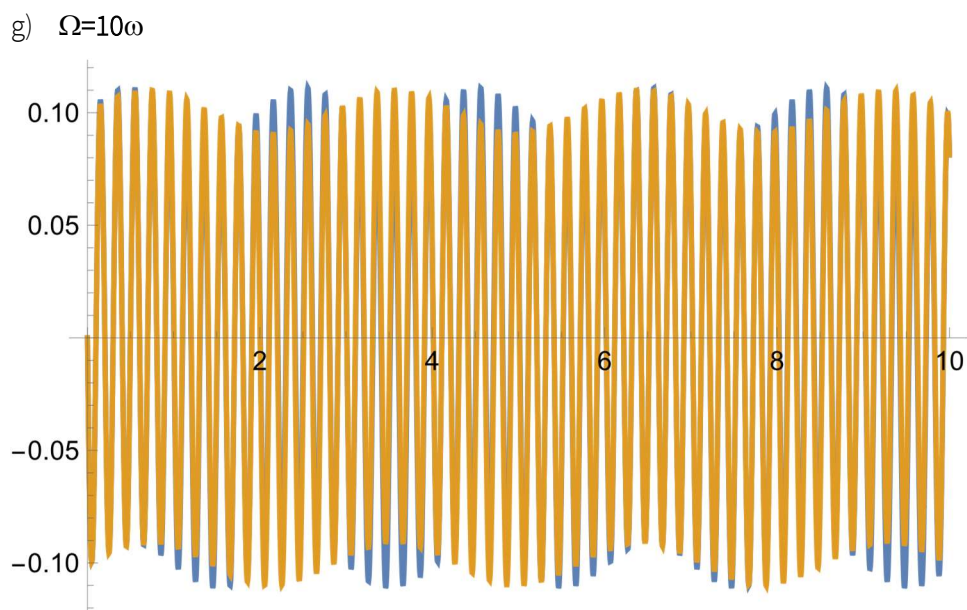
Widać różnice między rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym





# OMNIS

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.



Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\Omega$  zachodzą z większą amplitudą.



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Politechnika Warszawska



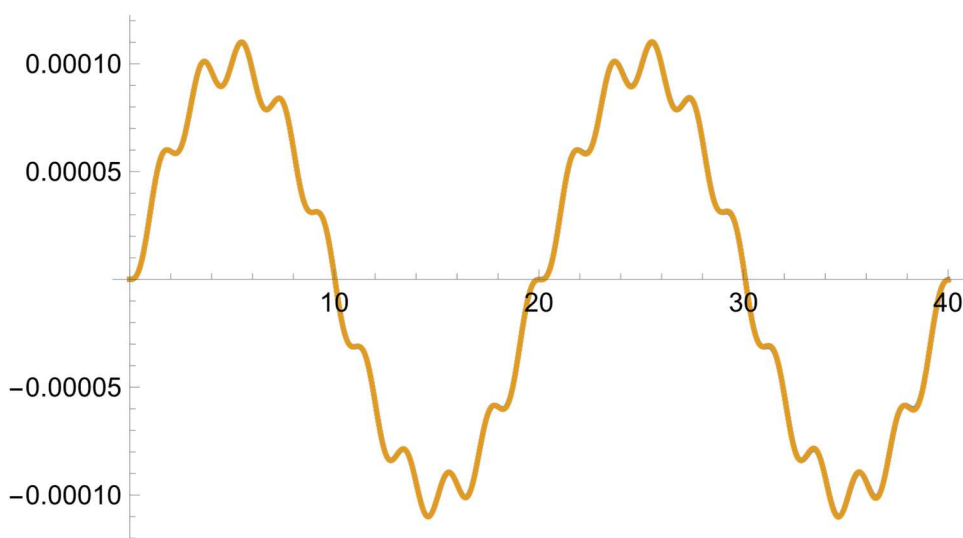
Dygresja Rozwiązanie silnie zależy od warunków początkowych ruchu.

Przy założeniu iż  $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$  w przybliżeniu małych drgań w przypadku

- 1) gdy  $\omega^2 \neq \Omega^2$  otrzymujemy  $C_2\omega + \frac{\Omega^3 A}{(\omega^2 - \Omega^2)l} = 0$  czyli  $C_2 = -\frac{A\Omega^3}{l\omega(\omega^2 - \Omega^2)}$  i ostatecznie  $\varphi(t) = \frac{A\Omega^2}{l(\omega^2 - \Omega^2)} \left[ \sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t) \right]$
- 2) gdy  $\omega = \Omega$  otrzymujemy  $C_2 = \frac{A}{2l}$  i ostatecznie  $\varphi = \frac{A}{2l} \sin(\Omega t) - \frac{A\Omega t}{2l} \cos(\Omega t)$

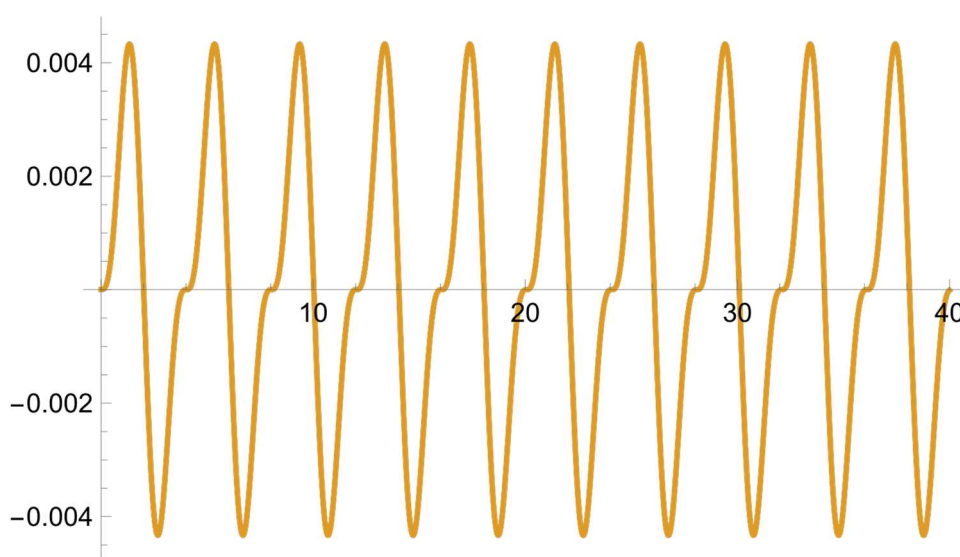
l) Rozwiązanie numeryczne otrzymane dla  $l=1m, A=0.01m$

a)  $\Omega=0.1\omega$ ,

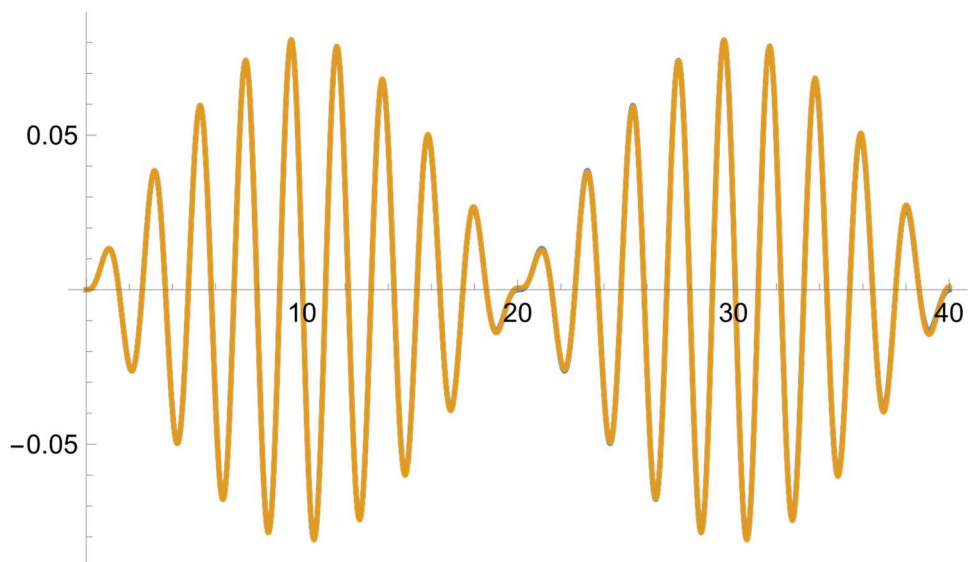


Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\Omega$  zachodzą z większą amplitudą

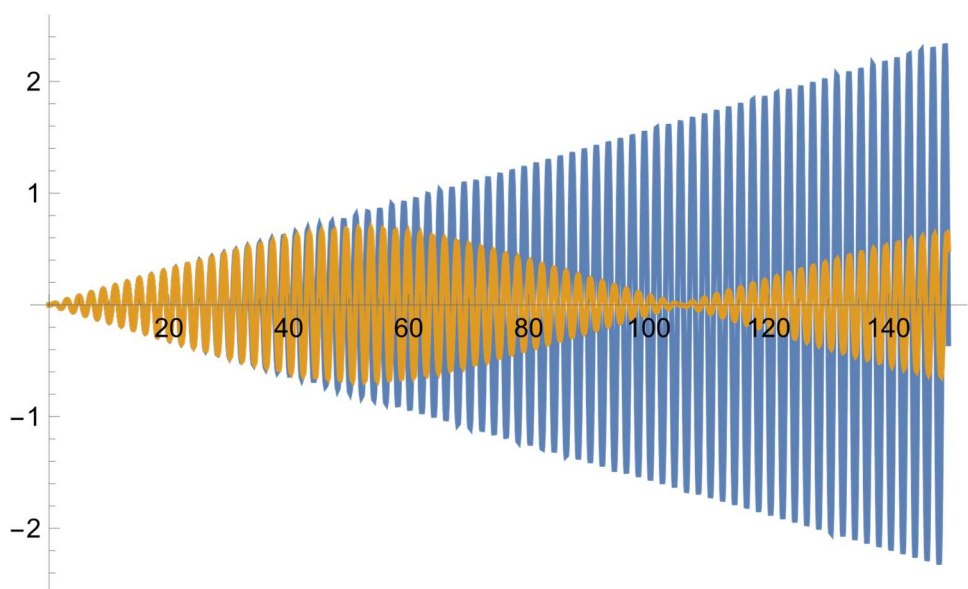
b)  $\Omega=0.5\omega$



c)  $\Omega=0.9\omega$

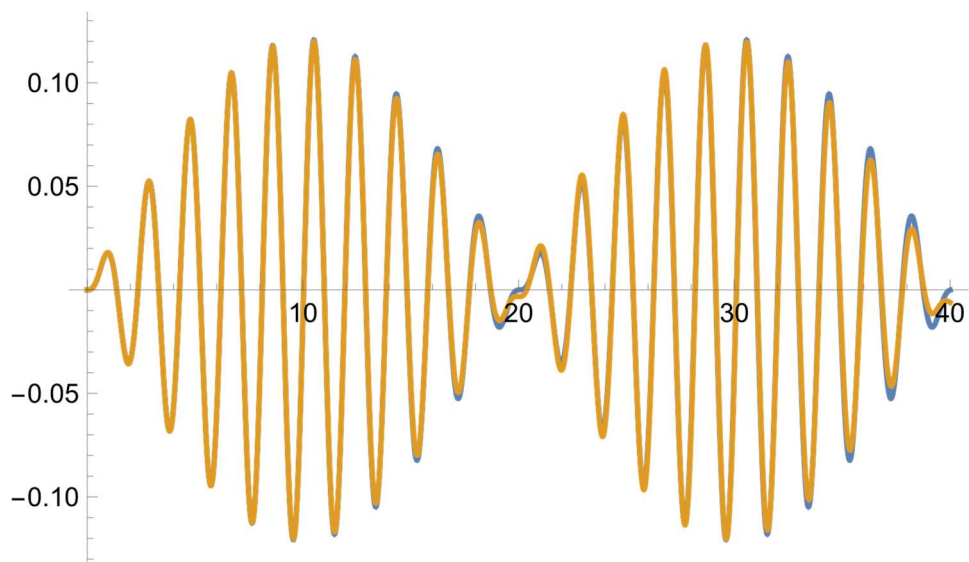


d)  $\Omega=\omega$

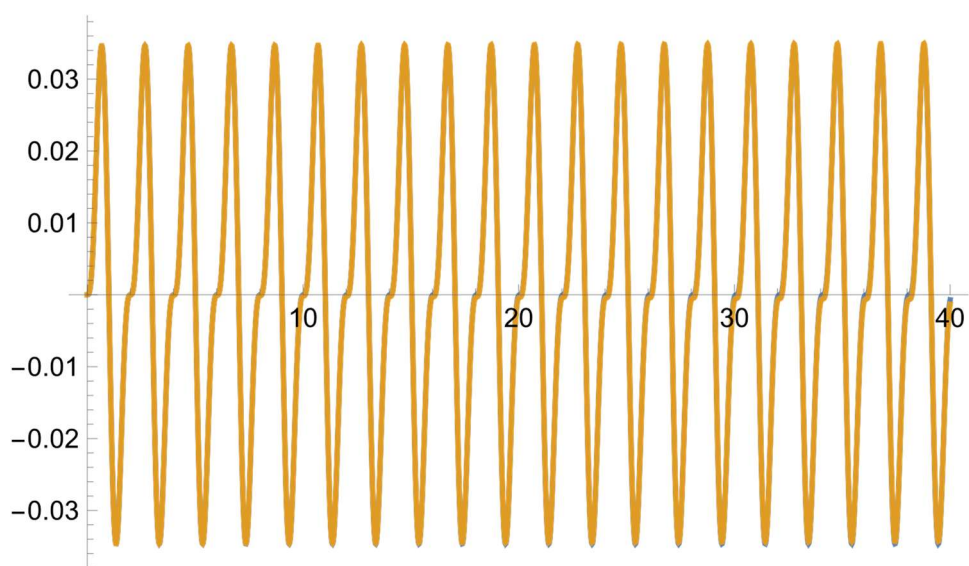


Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta  $\varphi$  i nie może opisywać zachowania układu

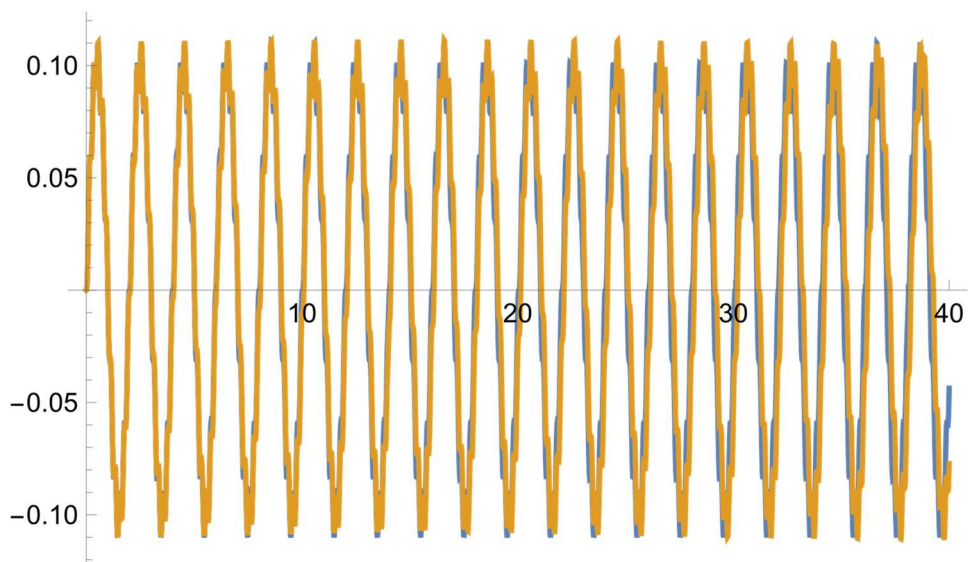
e)  $\Omega=1.1\omega$



f)  $\Omega=2\omega$



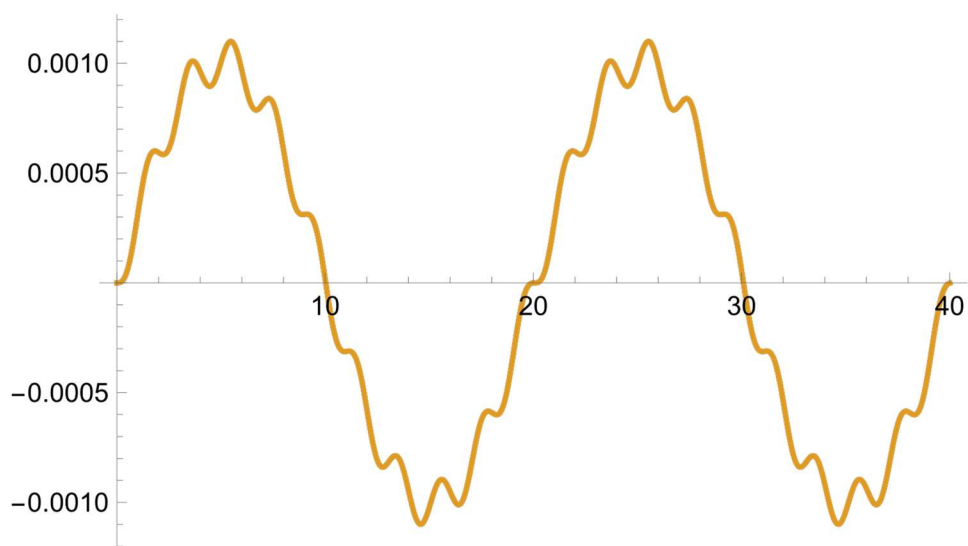
g)  $\Omega=10\omega$



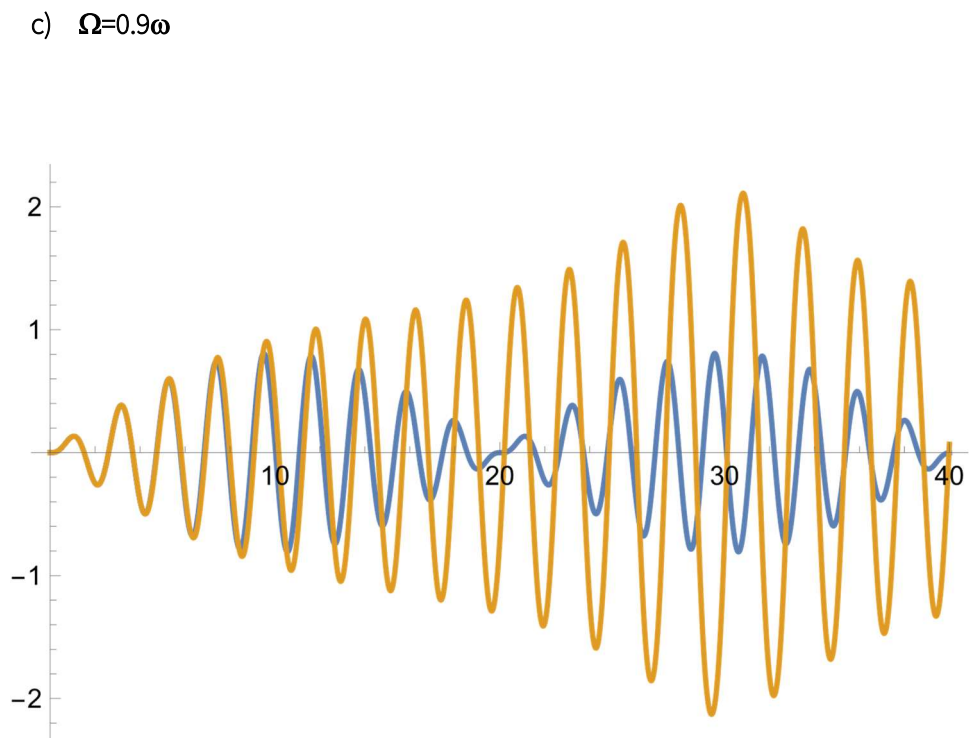
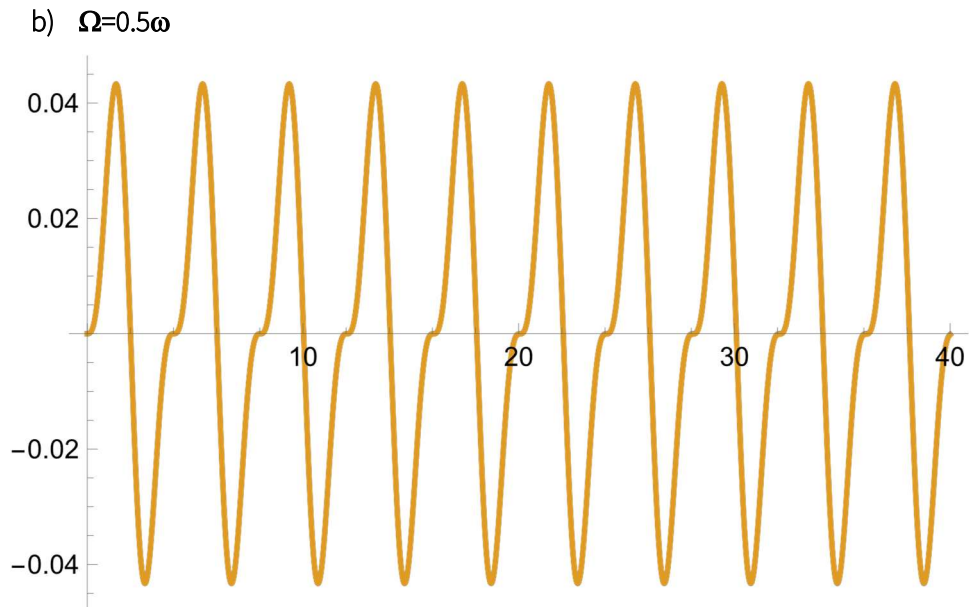
Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\omega$  zachodzą z większą amplitudą

II) Rozwiązanie numeryczne otrzymane dla  $l=1\text{m}$ ,  $A=0.1\text{m}$

a)  $\Omega=0.1\omega$ ,

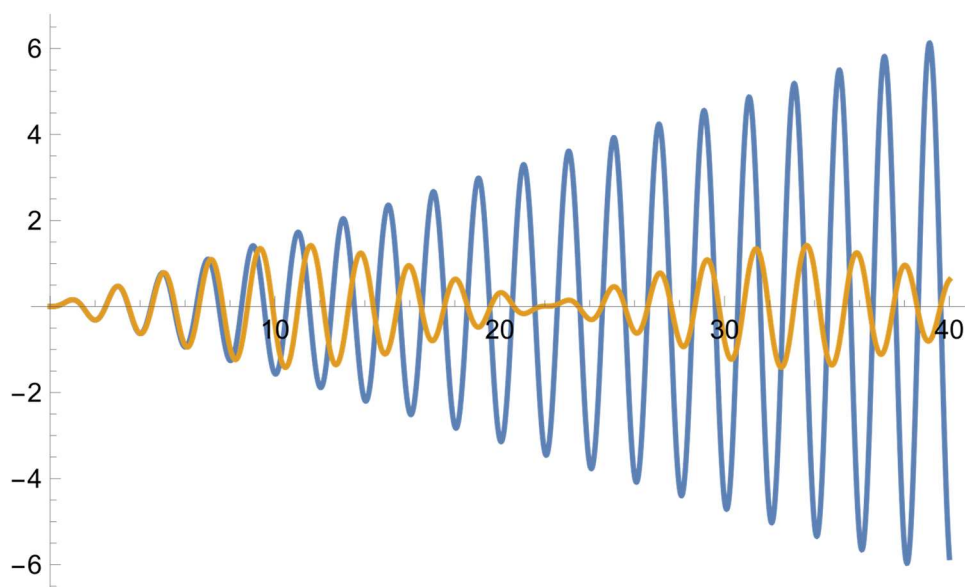


Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\Omega$  zachodzą z większą amplitudą



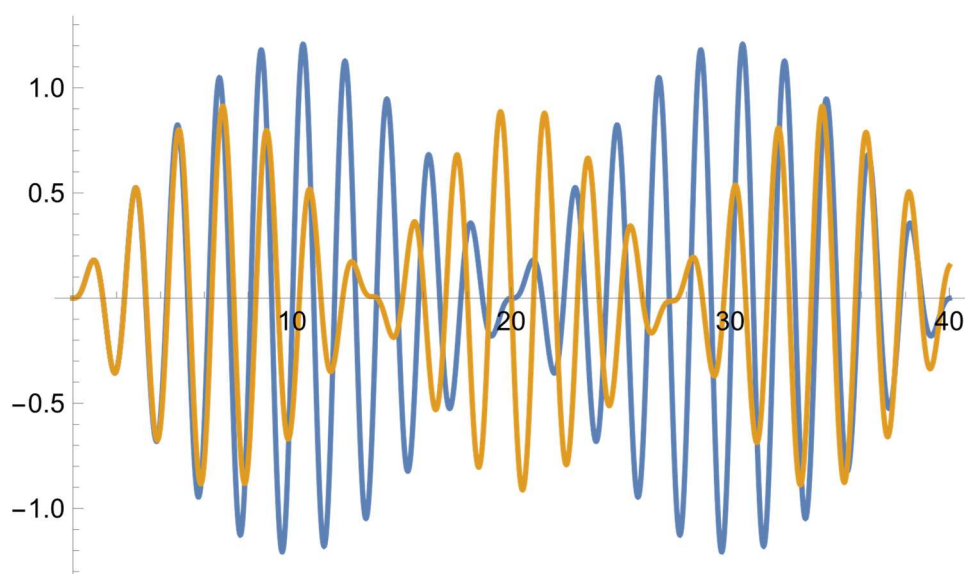
Widać iż zastosowane przybliżenie w tym przypadku nie jest uzasadnione

d)  $\Omega = \omega$



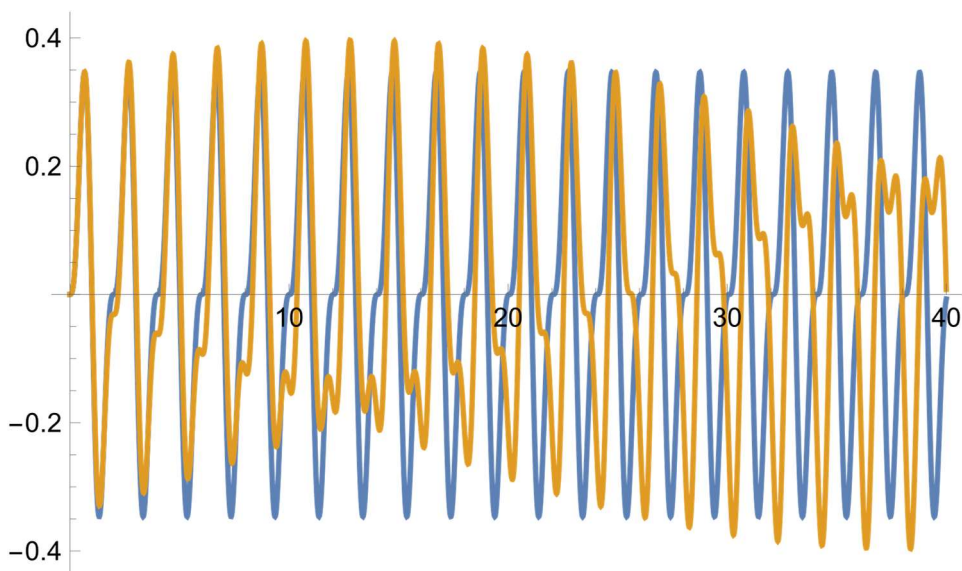
Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta  $\varphi$  i nie może opisywać zachowania układu

e)  $\Omega = 1.1\omega$

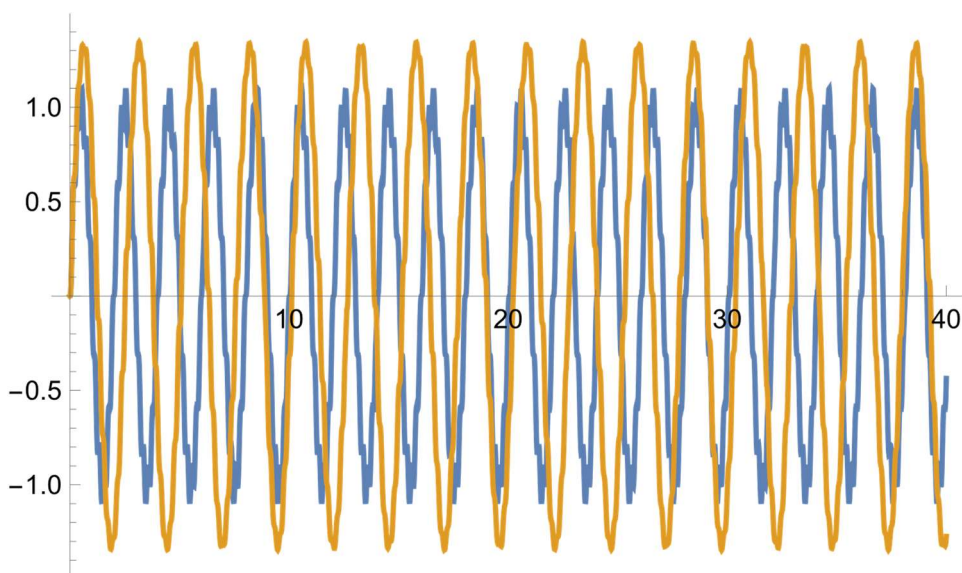


Widać iż zastosowane przybliżenie w tym przypadku nie jest uzasadnione

f)  $\Omega=2\omega$



g)  $\Omega=10\omega$



Złożenie drgań o częstości  $\Omega$  i  $\omega$ . Drgania o częstości  $\omega$  zachodzą z większą amplitudą