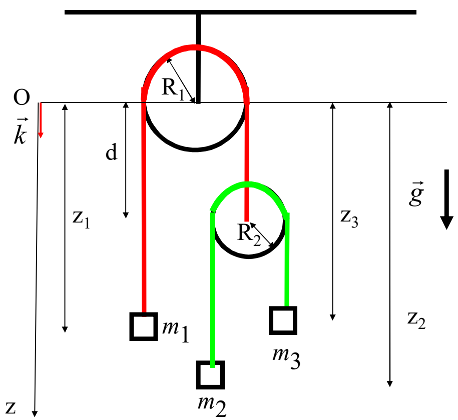
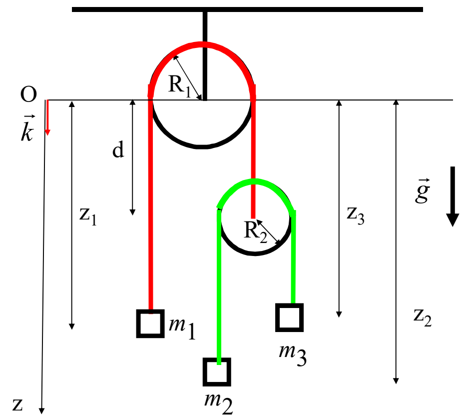
Zadanie 9 seria II

Znaleźć, wykorzystując zasadę d'Alemberta, przyspieszenia, z jakimi będą poruszać się klocki o masach m_1, m_2 oraz m_3 pokazane na poniższym rysunku Klocek o masie m_1 jest połączony z bloczkiem o promieniu R_2 liną o długości l_1 przerzuconą przez bloczek o promieniu R_1. Bloczek o promieniu R_1 jest nieruchomy, zaś bloczek o promieniu R_2 może poruszać się w kierunku pionowym. Przez bloczek o promieniu R_2 przerzucono linę o długości l_2 na końcach której umieszczono dwa klocki o masach równych m_2 oraz m_3. Na każdy z klocków działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g. Tarcie nieważkich i nierozciągliwych lin o bloczki pominąć.



Ruch w przestrzeni quasi-jednowymiarowej – przesunięcia wirtualne klocków zgodne z więzami $\delta\vec{r}_i = \delta z_i \vec{k}$ ($\vec{k}$ -wersor określający zwrot osi Oz, i=1,2,3).



Poszukiwanie równania więzów:

1 warunek pomocniczy: $(z_2 - d) + (z_3 - d) = l_2 - \pi R_2$

w którym przez l_2 oznaczono stałą długość nici zielonej na którym wiszą klocki o masach m_2 *i* m_3.

2 warunek pomocniczy $z_1 + d = l_1 - \pi R_1$

w którym przez l_1 oznaczono stałą długość nici czerwonej na którym wisi klocek o masie m_1 i bloczek o promieniu R_2.

Trzeba wyeliminować nieznaną zmienną d:

$$z_1 + d = l_1 - \pi R_1 \Rightarrow d = l_1 - \pi R_1 - z_1$$

i wstawić do 1 warunku zapisując równ. więzów

$$(z_2 - d) + (z_3 - d) = l_2 - \pi R_2 \Rightarrow z_2 + z_3 - 2l_1 + 2\pi R_1 + 2z_1 = l_2 - \pi R_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f = 2z_1 + z_2 + z_3 - 2l_1 - l_2 + 2\pi R_1 + \pi R_2 = 0}$$

Równanie więzów

Zapis warunku na dozwolone przesunięcia wirtualne klocków

$grad_i f = \frac{\partial f}{\partial z_i}\vec{k}$ $\delta\vec{r_i} = \delta z_i \vec{k}$

(sumowanie po klockach)

$$\sum_{i=1}^{n=3} grad_i f \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}\delta z_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3}\delta z_3 = 0 \Rightarrow 2\delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta z_3 = -2\delta z_1 - \delta z_2$$

$$f = 2z_1 + z_2 + z_3 - 2l_1 - l_2 + 2\pi R_1 + \pi R_2 = 0$$

Siły działające na klocki (bez uwzględnienia więzów) $\vec{F}_1 = m_1 g\vec{k}$ $\vec{F}_2 = m_2 g\vec{k}$ $\vec{F}_3 = m_3 g\vec{k}$

Zapis podstawowego równania zasady d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{n=3}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Rightarrow (m_1 g - m_1\ddot{z}_1)\delta z_1 + (m_2 g - m_2\ddot{z}_2)\delta z_2 + (m_3 g - m_3\ddot{z}_3)\delta z_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 g - m_1\ddot{z}_1 - 2m_3 g + 2m_3\ddot{z}_3)\delta z_1 + (m_2 g - m_2\ddot{z}_2 - m_3 g + m_3\ddot{z}_3)\delta z_2 = 0$$

δz_1 oraz δz_2 dowolne

$$m_1 g - m_1\ddot{z}_1 - 2m_3 g + 2m_3\ddot{z}_3 = 0$$

$$m_2 g - m_2\ddot{z}_2 - m_3 g + m_3\ddot{z}_3 = 0$$

Układ dwóch równań ruchu

Dodatkowo mamy równanie więzów

$$2z_1 + z_2 + z_3 - 2l_1 - l_2 + 2\pi R_1 + \pi R_2 = 0$$

$$2z_1 + z_2 + z_3 - 2l_1 - l_2 + 2\pi R_1 + \pi R_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -2z_1 - z_3 + 2l_1 + l_2 - 2\pi R_1 - \pi R_2$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_2 = -2\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3$$

$$m_1 g - m_1\ddot{z}_1 - 2m_3 g + 2m_3\ddot{z}_3 = 0 \Rightarrow -m_1\ddot{z}_1 + 2m_3\ddot{z}_3 = (2m_3 - m_1)g \qquad (*)$$

$$m_2 g - m_2\ddot{z}_2 - m_3 g + m_3\ddot{z}_3 = 0 \Rightarrow \quad 2m_2\ddot{z}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{z}_3 = (m_3 - m_2)g \qquad (**)$$

Mnożąc równanie (*) przez $2m_2$ oraz (**) przez m_1 i dodając otrzymane równania stronami otrzymujemy

$$(4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3)\ddot{z}_3 = (4m_2m_3 - 2m_1m_2 + m_1m_3 - m_1m_2)g \Rightarrow \ddot{z}_3 = \frac{-3m_1m_2 + 4m_2m_3 + m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

Mnożąc równanie (*) przez (m_2+m_3) oraz (**) przez $(-2m_3)$ i dodając otrzymane równania stronami otrzymujemy

$$(-m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3)\ddot{z}_1 = (2m_2m_3 + 2m_3^2 - m_1m_2 - m_1m_3 - 2m_3^2 + 2m_2m_3)g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_1 = \frac{m_1m_2 - 4m_2m_3 + m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\ddot{z}_2 = -2\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 = \frac{m_1m_2 + 4m_2m_3 - 3m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$