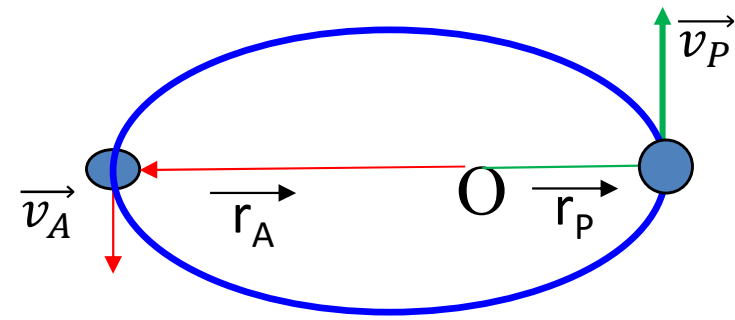


Zadanie 9 (seria I). Elipsa o dużej półosi równej a oraz parametrze P jest torem ruchu ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych znajdującego się w ognisku elipsy o wartości odwrotnie proporcjonalnej do jego odległości od początku układu współrzędnych.



Określić wartość stosunku $\frac{v_P}{v_A}$ gdzie v_P –wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie

w punkcie położonym najbliżej od początku układu współrzędnych oraz v_A - wartość prędkości ciała poruszającego się po elipsie w punkcie położonym najdalej od początku układu współrzędnych.

Wsk. Równanie parametryczne elipsy w układzie biegunowym:

$$r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{gdzie } P - \text{parametr elipsy, } \varepsilon - \text{mimośród elipsy.}$$

W peryhelium i aphelium wektory wodzący i prędkości są prostopadłe do siebie gdyż w tych punktach $\dot{r} = 0$ a zatem wektor prędkości jest równy

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

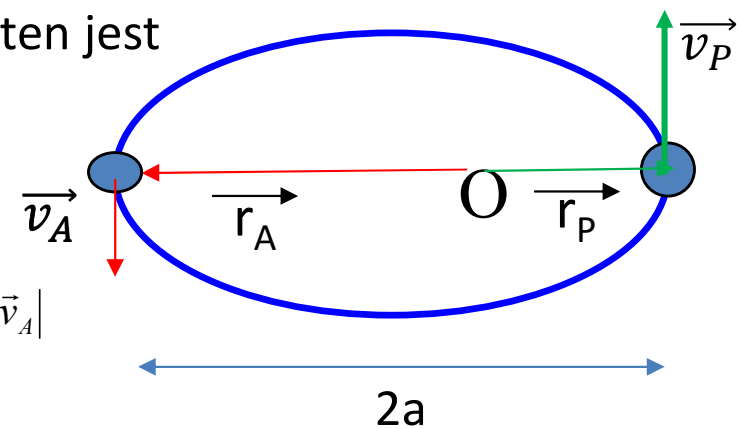
Jest on zatem równoległy do wersora $\vec{e}_\varphi$ układu biegunowego, który jest prostopadły do wektora wodzącego $\vec{r} = r\vec{e}_r$ równoległego do wersora $\vec{e}_r$.

Ze stałości w czasie momentu pędu wynika iż moment ten jest jednakowy w peryhelium i aphelium i równy

$$L = \text{const} = \mu r_P v_P \sin(90^\circ) = \mu r_A v_A \sin(90^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P}$$

$$v_p = |\vec{v}_p| \quad v_A = |\vec{v}_A|$$



Z równania toru będącego elipsą $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$ wynika iż

$$\frac{r_A}{r_P} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{\frac{P}{1-\varepsilon}}{\frac{P}{1+\varepsilon}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

gdyż r osiąga maksimum czyli $r=r_{\max}=r_A = \frac{P}{1-\varepsilon}$ gdy $\varphi - \varphi_0 = \pi + 2n\pi$

gdyż r osiąga minimum czyli $r=r_{\min}=r_P = \frac{P}{1+\varepsilon}$ gdy $\varphi - \varphi_0 = 0 + 2n\pi$

Długość dużej (wielkiej) półosi elipsy a :

$$a = \frac{1}{2}[r_{\min} + r_{\max}] = \frac{1}{2}\left[\frac{P}{1+\varepsilon} + \frac{P}{1-\varepsilon}\right] = \frac{P(1-\varepsilon+1+\varepsilon)}{2(1-\varepsilon^2)} = \frac{P}{1-\varepsilon^2}$$

Wynika stąd iż $1 - \varepsilon^2 = \frac{P}{a} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{P}{a}}$ a zatem $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{P}{a}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{P}{a}}}$