

Zadanie 8 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \text{ gdzie } f(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \text{ (}\vec{r} \text{ -wektor wodzący ciała, } \alpha \text{ -stała)}$$

Wykorzystując wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ oraz relacje

$$E = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r) \text{ pokazać, że równanie opisujące tor ruchu ciała o masie } m$$

w układzie biegunowym w przypadku gdy $L \neq 0$ ma postać:

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \text{ gdy } \alpha > 0 \text{ (siła skierowana w kierunku początku układu}$$

współrzędnych),

$$r(\varphi) = \frac{P}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \text{ gdy } \alpha < 0 \text{ (siła skierowana w kierunku przeciwnym)}$$

przy czym $P = \frac{L^2}{m|\alpha|}$ oraz $\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, E oznacza energię, zaś L wartość momentu

Zapis równania różniczkowego wynikającego ze wzoru Bineta $-\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=f(r)$

$$f(r)=-\frac{\alpha}{r^2}\Rightarrow -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=-\frac{\alpha}{r^2}\Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{m\alpha}{L^2}$$

$$u=\frac{1}{r}\Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m\alpha}{L^2}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach niejednorodnego

Rozwiązanie można przyjąć w postaci sumy rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania pełnego niejednorodnego

1) Poszukiwanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=0$$

Rozwiązanie poszukujemy w postaci $u_{ogrj}=C\exp(\lambda\varphi)$

$$\frac{d^2u_{ogrj}}{d\varphi^2}+u_{ogrj}=0\Rightarrow \lambda^2C\exp(\lambda\varphi)+C\exp(\lambda\varphi)=0\Rightarrow \lambda^2+1=0 \text{ (równanie charakterystyczne)}$$

Pierwiastki równania $\lambda^2+1=0$ to $\lambda_1=i$ oraz $\lambda_2=-i$

Ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$u_{ogrj}=C_1\exp(\lambda_1\varphi)+C_2\exp(\lambda_2\varphi)=C_1\exp(i\varphi)+C_2\exp(-i\varphi)$$

C_1, C_2 stałe dowolne zespolone (dwie stałe bo równanie różniczkowe rzędu drugiego)

Poszukiwanie postaci rozwiązania bez wykorzystywania liczb zespolonych

$$\begin{aligned} u_{ogrj} &= C_1 \exp(i\varphi) + C_2 \exp(-i\varphi) = C_1 [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] + C_2 [\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)] = \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\varphi) + i(C_1 - C_2) \sin(\varphi) = B_1 \cos(\varphi) + B_2 \sin(\varphi) \end{aligned}$$

gdzie $B_1 = C_1 + C_2$, $B_2 = i(C_1 - C_2)$ - stałe dowolne będące liczbami rzeczywistymi gdy r rzeczywiste

Rozwiązanie w postaci

$$u_{ogrj} = B_1 \cos(\varphi) + B_2 \sin(\varphi)$$

jest równoważne rozwiązaniu zapisanemu w postaci

$$u_{ogrj} = A \cos(\varphi - \varphi_0) \text{ gdzie } A, \varphi_0 \text{ - stałe dowolne}$$

Dowód

$$u_{ogrj} = A \cos(\varphi - \varphi_0) = A \cos(\varphi) \cos(\varphi_0) + A \sin(\varphi) \sin(\varphi_0)$$

Zgodność gdy $B_1 = A \cos(\varphi_0)$, $B_2 = A \sin(\varphi_0)$

2) Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania pełnego niejednorodnego

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m\alpha}{L^2}$$

Prawa strona równania nie zależy od φ , można poszukiwać rozwiązania w postaci stałej

$$u_{sz} = C \Rightarrow \frac{d^2 u_{sz}}{d\varphi^2} + u_{sz} = C$$

$$\frac{d^2 u_{sz}}{d\varphi^2} + u_{sz} = \frac{m\alpha}{L^2} \Rightarrow C = \frac{m\alpha}{L^2}$$

Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego przyjmuje postać

$$u_{og} = \frac{1}{r} = u_{ogrj} + u_{sz} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{L^2} \quad (1)$$

Uzależnienie stałej A od energii całkowitej i wartości momentu pędu będących całkami ruchu

Uzależnienie energii potencjalnej od r

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int f(r)dr = -\int -\frac{\alpha}{r^2}dr = -\frac{\alpha}{r} + C$$

$$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \text{ Znajdzie } V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ gdy } C=0. \quad \text{Przyjmujemy } V = -\frac{\alpha}{r} = -\alpha u$$

Uzależnienie energii całkowitej od A

$$E = \frac{L^2}{2m} \left\{ \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left\{ \left[\frac{du}{d\varphi} \right]^2 + u^2 \right\} + V\left(r = \frac{1}{u}\right) \quad (2)$$

$$u = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{L^2}, \quad V = -\alpha u \Rightarrow$$

$$E = \frac{L^2}{2m} \left\{ \left[-A \sin(\varphi - \varphi_0) \right]^2 + \left[A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{L^2} \right]^2 \right\} - \alpha \left[A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{L^2} \right] =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left\{ A^2 [\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0)] + \frac{2Am\alpha}{L^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m^2\alpha^2}{L^4} \right\} - \alpha \left[A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{L^2} \right] =$$

$$E = \frac{L^2 A^2}{2m} + A\alpha \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha^2}{2L^2} - A\alpha \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{m\alpha^2}{L^2} = \frac{L^2 A^2}{2m} - \frac{m\alpha^2}{2L^2}$$

E nie zależy od φ bo energia ciała nie zależy od położenia punktu na torze ruchu

Zakładając iż stała A jest dodatnia

$$A = \sqrt{\frac{2m}{L^2} \left(E + \frac{m\alpha^2}{2L^2} \right)} = \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4}} = \frac{m|\alpha|}{L^2} \sqrt{\frac{2L^2 E}{m\alpha^2} + 1}$$

(przyjęcie ujemnego znaku A można by skompensować zmieniając o π stałą φ_0)

dążymy do

$$r(\varphi) = \frac{P}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$$

$$P = \frac{L^2}{m|\alpha|}$$

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{m|\alpha|}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} + \frac{m\alpha}{L^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{m|\alpha|}{L^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} + 1 \right]} & \text{gdy } \alpha > 0 \\ \frac{1}{\frac{m|\alpha|}{L^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0)} - 1 \right]} & \text{gdy } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\alpha = |\alpha| \text{ gdy } \alpha > 0; \alpha = -|\alpha| \text{ gdy } \alpha < 0$$

$$\text{Można je zapisać w postaci: } r = \begin{cases} \frac{P}{\left[\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + 1 \right]} & \text{gdy } \alpha > 0 \\ \frac{P}{\left[\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) - 1 \right]} & \text{gdy } \alpha < 0 \end{cases}$$

Jest to ogólna postać równania krzywej stożkowej w układzie biegunowym, gdzie parametr krzywej stożkowej

$$P = \frac{L^2}{m|\alpha|} > 0,$$

mimośród krzywej stożkowej:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}} \geq 0. \quad (3)$$

Krzywe stożkowe okrąg, elipsa, parabola, hiperbola

Gdy $\alpha > 0$ to gdy $\varepsilon > 1$ to $E > 0$ i równaniem toru jest bliżej położona od ogniska gałąź hiperboli

gdy $\varepsilon = 1$ to $E = 0$ i równaniem toru jest parabola

gdy $0 < \varepsilon < 1$ to $E < 0$ i równaniem toru jest elipsa

gdy w szczególności $\varepsilon = 0$ to równaniem toru jest okrąg

Gdy $\alpha < 0$ to musi być $\varepsilon > 1$ czyli $E > 0$ i równaniem toru może być tylko dalej położona od ogniska gałąź hiperboli