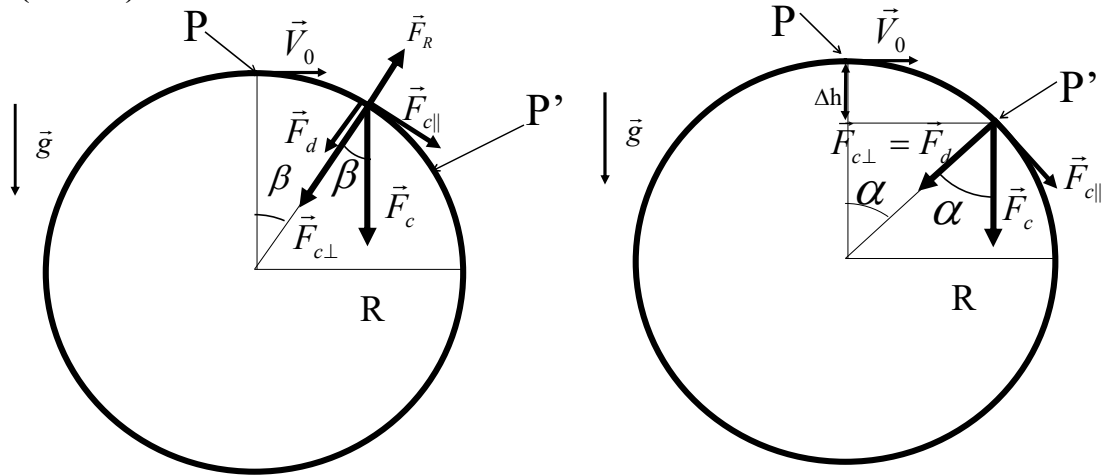


Zad. 8 (seria V)



Żeby ciało o masie m poruszało się po powierzchni kuli o promieniu R musi na nie działać siła dośrodkowa skierowana w kierunku środka kuli o wartości $F_d = \frac{mV^2}{R}$ zależnej od aktualnej wartości prędkości ciała V .

W punktach położonych pomiędzy punktem startu ciała P oraz punktem P' w którym ciało się odrywa od powierzchni kuli zachodzi relacja

$$\begin{aligned}\vec{F}_d &= \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R \\ F_d &= F_{c\perp} - F_R\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie $\vec{F}_{c\perp}$ oznacza składową prostopadłą do kuli siły ciężkości o wartości

$$F_{c\perp} = F_c \cos(\beta) = mg \cos(\beta),$$

zaś $\vec{F}_R$ oznacza siłę reakcji ze strony kuli o wartości F_R .

Kąt β jest kątem jaki tworzy siła ciężkości z siłą dośrodkową w analizowanym punkcie.

Wartość siły reakcji na podstawie wzoru (1) jest równa

$$F_R = F_{c\perp} - F_d = mg \cos(\beta) - \frac{mV^2}{R}.$$

Składowa styczna do powierzchni kuli siły ciężkości $F_{c\parallel} = F_c \sin(\beta) = mg \sin(\beta)$ powoduje wzrost wartości prędkości ciała podczas jego zsuwania się po powierzchni kuli.

Wartość siły $F_{c\perp} = F_c \cos(\beta) = mg \cos(\beta)$ maleje wraz z obniżaniem się wysokości na której znajduje się ciało, podczas gdy wartość siły dośrodkowej $F_d = \frac{mV^2}{R}$ rośnie z uwagi na

wzrost wartości prędkości ciała.

W punkcie oderwania się ciała od powierzchni kuli $F_R = 0$, skąd wynika relacja $F_d = F_{c\perp}$ z której wynika iż w tym punkcie

$$\frac{mV^2}{R} = mg \cos(\beta)$$

$$V = \sqrt{Rg \cos(\beta)}$$

czyli wartość prędkości ciała w tym punkcie P' uwzględniając fakt iż w tym punkcie zgodnie z treścią zadania $\beta = \alpha$ jest równa

$$V_{P'} = \sqrt{Rg \cos(\beta)} = \sqrt{Rg \cos(\alpha)} \quad (2)$$

W punktach leżących poniżej punktu P' spełnienie relacji $F_d = F_{c\perp} - F_R$ wymagałoby żeby $F_R < 0$ co nie jest możliwe.

Ponieważ w trakcie ruchu na ciało działały tylko siła ciężkości będąca siłą zachowawczą i siła reakcji, która nie wykonuje pracy, to całkowita energia mechaniczna będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej związanej z siłą ciężkości nie ulega zmianie

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{mV^2}{2} + mgh = const \quad \text{gdzie } h \text{ wysokość ciała nad dowolnie wybrany poziom}$$

odniesienia

W celu powiązania wartości prędkości ciała w punktach P' ($V_{P'}$) oraz P (V_0) stosujemy tą zasadę zachowania energii z której wynika iż

$$E_{kin}(P) + E_{pot}(P) = E_{kin}(P') + E_{pot}(P')$$

$$E_{kin}(P) = E_{kin}(P') - (E_{pot}(P) - E_{pot}(P'))$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_{P'}^2}{2} - mg\Delta h \quad (3)$$

gdzie

$$\Delta h = R - R \cos(\alpha) \quad (4)$$

określa wysokość punktu P ponad punktem P'.

Po wstawieniu relacji (2) i (4) do wzoru (3) otrzymujemy

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mRg \cos(\alpha)}{2} - mgR + mgR \cos(\alpha) = \frac{3mRg \cos(\alpha)}{2} - mgR$$

z czego wynika iż

$$V_0^2 = 3Rg \cos(\alpha) - 2gR$$

$$V_0 = \sqrt{Rg(3 \cos \alpha - 2)}$$

Dla kąta $\alpha = 30^\circ$ mamy $\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2$ i $V_0 = \sqrt{Rg(3 \cos \alpha - 2)} \approx 2,42 \frac{m}{s}$