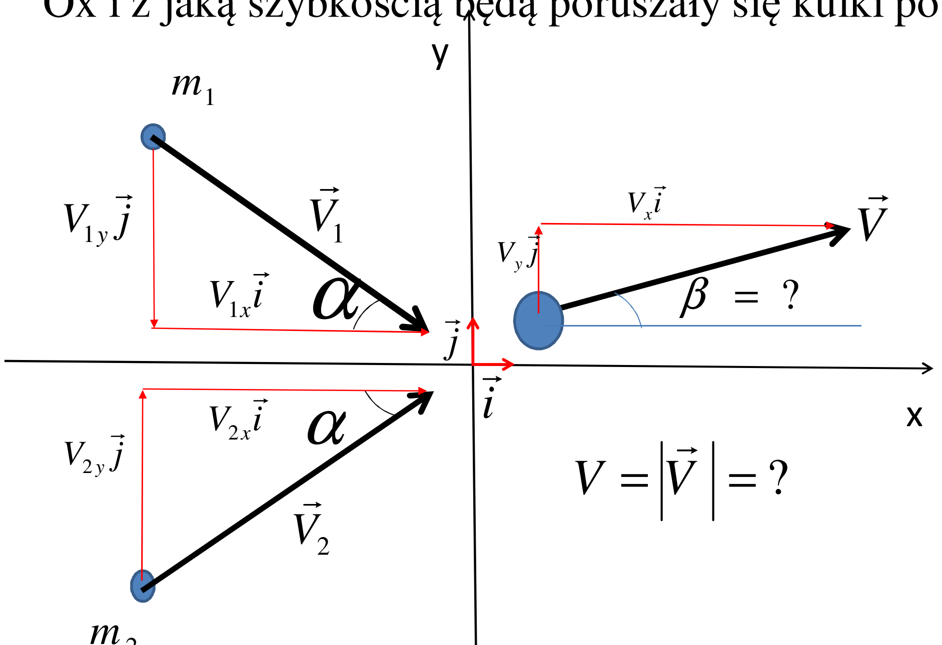
Zad. 8 (seria III). Dwie plastelinowe kulki o masach m_1 i m_2 poruszają się z szybkościami V_1 i V_2 w kierunkach nachylonych pod katem α do osi Ox układu współrzędnych. Kulki zderzają się w początku układu współrzędnych i zlepiają. Pod jakim kątem do osi Ox i z jaką szybkością będą poruszały się kulki po zderzeniu?



$\vec{V}_n = V_{nx}\vec{i} + V_{ny}\vec{j}$ $\quad n=1,2$

Dane: $V_1, V_2, m_1, m_2, \alpha$

Szukane : V, β

Pęd układu nie ulega zmianie w trakcie zderzeni

Określenie składowych prędkości ciała pierwszego przed zderzeniem

$$\cos(\alpha) = \frac{|V_{1x}|}{|\vec{V}_1|} \Rightarrow |V_{1x}| = V_1\cos(\alpha)$$

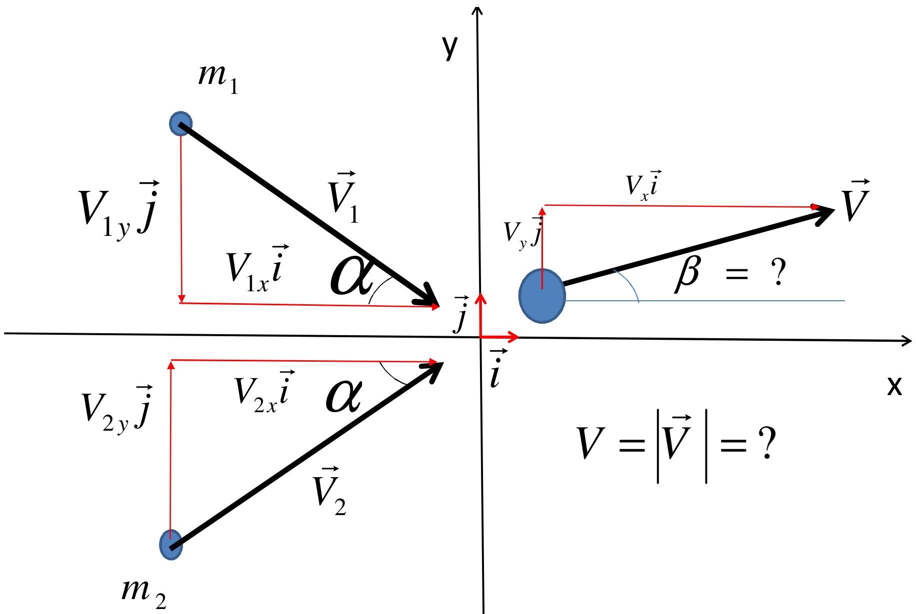
$$\sin(\alpha) = \frac{|V_{1y}|}{|\vec{V}_1|} \Rightarrow |V_{1y}| = V_1\sin(\alpha)$$

Rzut prędkości ciała o masie m_1 na oś Ox ma taki sam zwrot jak wersor $\vec{i}$

$$\Rightarrow V_{1x} = |V_{1x}| = V_1\cos(\alpha)$$

Rzut prędkości ciała o masie m_1 na oś Oy ma przeciwny zwrot niż wersor $\vec{j}$

$$\Rightarrow V_{1y} = -|V_{1y}| = -V_1\sin(\alpha)$$



Określenie składowych prędkości ciała drugiego przed zderzeniem

$$\cos(\alpha) = \frac{|V_{2x}|}{|\vec{V}_2|} \Rightarrow |V_{2x}| = V_2\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|V_{2y}|}{|\vec{V}_2|} \Rightarrow |V_{2y}| = V_2\sin(\alpha)$$

Rzut prędkości ciała o masie m_2 na oś Ox ma taki sam zwrot jak wersor $\vec{i}$

$$\Rightarrow V_{2x} = |V_{2x}| = V_2\cos(\alpha)$$

Rzut prędkości ciała o masie m_2 na oś Ox ma taki sam zwrot jak wersor $\vec{j}$

$$\Rightarrow V_{2y} = |V_{2y}| = V_2\sin(\alpha)$$

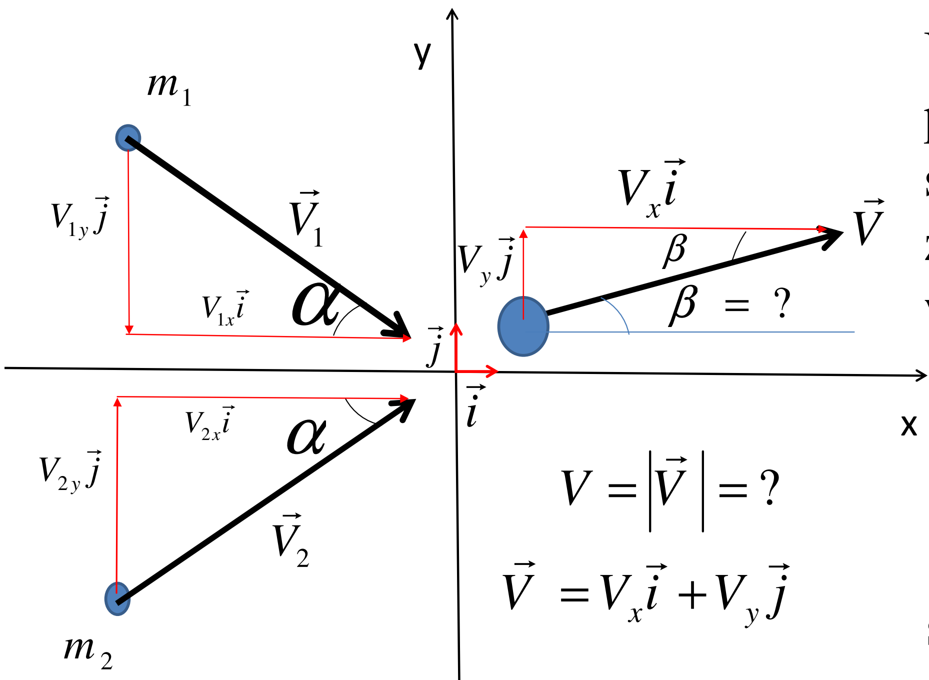
Określenie składowej x-owej pędu układu przed zderzeniem

$$p_{ux,pocz} \Rightarrow p_{1x} + p_{2x} = m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = m_1V_1\cos(\alpha) + m_2V_2\cos(\alpha)$$

Określenie składowej y-owej pędu układu przed zderzeniem

$$p_{uy,pocz} \Rightarrow p_{1y} + p_{2y} = m_1V_{1y} + m_2V_{2y} = -m_1V_1\sin(\alpha) + m_2V_2\sin(\alpha)$$

Uzależnienie składowych x-owej i y-owej prędkości układu po zderzeniu od wartości szybkości układu po zderzeniu V przy założeniu zgodnego z rysunkiem kierunku wektora prędkości $(V_x>0, V_y>0)$



$$V = \left|\vec{V}\right| = ?$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

$$\cos(\beta) = \frac{V_x}{V} \Rightarrow V_x = V\cos(\beta)$$

$$\sin(\beta) = \frac{V_y}{V} \Rightarrow V_y = V\sin(\beta)$$

Składowe pędu układu po zderzeniu

$$p_{ux,konc} = (m_1+m_2)V_x = (m_1+m_2)V\cos(\beta)$$

$$p_{uy,konc} = (m_1+m_2)V_y = (m_1+m_2)V\sin(\beta)$$

Z zasady zachowania pędu

$$\vec{p}_{u,pocz} = \vec{p}_{u,konc}$$

$$p_{ux,pocz} = m_1V_1\cos(\alpha) + m_2V_2\cos(\alpha)$$

$$p_{uy,pocz} = -m_1V_1\sin(\alpha) + m_2V_2\sin(\alpha)$$

$$p_{ux,pocz} = p_{ux,konc} \quad \Rightarrow m_1V_1\cos(\alpha) + m_2V_2\cos(\alpha) = (m_1+m_2)V\cos(\beta)$$

$$p_{uy,pocz} = p_{uy,konc} \quad \Rightarrow -m_1V_1\sin(\alpha) + m_2V_2\sin(\alpha) = (m_1+m_2)V\sin(\beta)$$

$$m_1V_1\cos(\alpha)+m_2V_2\cos(\alpha)=(m_1+m_2)V\cos(\beta) \qquad (1)$$

$$-m_1V_1\sin(\alpha)+m_2V_2\sin(\alpha)=(m_1+m_2)V\sin(\beta) \qquad (2)$$

Relacje powyższe są zgodne ze wzorem podanym na wykładzie opisującym zderzenie całkowicie niesprężyste

$$m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2=(m_1+m_2)\vec{V}_k \qquad (3)$$

jeżeli uwzględnimy to iż

$$\vec{V}_1=V_{1x}\vec{i}+V_{1y}\vec{j}=V_1\cos(\alpha)\vec{i}-V_1\sin(\alpha)\vec{j}$$

$$\vec{V}_2=V_{2x}\vec{i}+V_{2y}\vec{j}=V_2\cos(\alpha)\vec{i}+V_2\sin(\alpha)\vec{j}$$

$$\vec{V}_k=V_{kx}\vec{i}+V_{ky}\vec{j}=V\cos(\beta)\vec{i}+V\sin(\beta)\vec{j}$$

$$z(3)\Rightarrow m_1V_1\cos(\alpha)\vec{i}-m_1V_1\sin(\alpha)\vec{j}+m_2V_2\cos(\alpha)\vec{i}+m_2V_2\sin(\alpha)\vec{j}=(m_1+m_2)V\cos(\beta)\vec{i}+(m_1+m_2)V\sin(\beta)\vec{j}$$

Porównując wyrazy stojące w powyższym równaniu przy wersorach $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$ otrzymujemy równania (1) i (2).

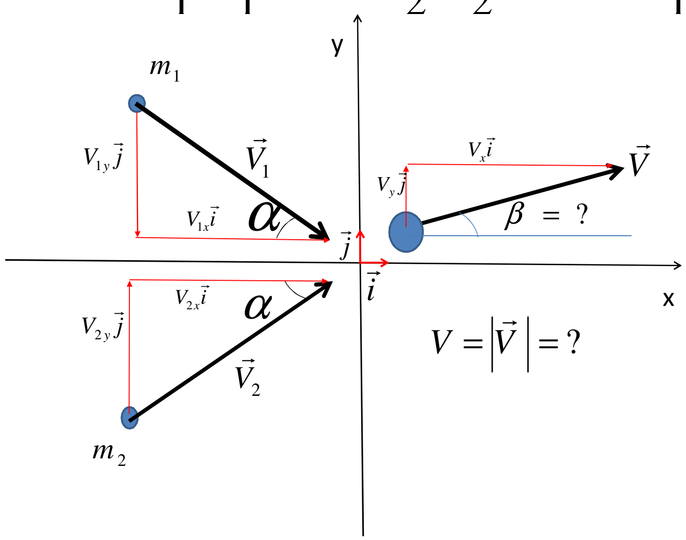
$$m_1V_1\cos(\alpha)+m_2V_2\cos(\alpha)=(m_1+m_2)V\cos(\beta) \qquad (1)$$

$$-m_1V_1\sin(\alpha)+m_2V_2\sin(\alpha)=(m_1+m_2)V\sin(\beta) \qquad (2)$$

W celu określenia szybkości V podnosimy równania (1) i (2) do kwadratu i dodajemy stronami

$$\Rightarrow m_1^2V_1^2\left[\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right]+m_2^2V_2^2\left[\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right]+2m_1V_1m_2V_2\left[\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right]=$$
$$=(m_1+m_2)^2V^2\left[\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1^2V_1^2+m_2^2V_2^2+2m_1V_1m_2V_2\cos(2\alpha)=(m_1+m_2)^2V^2\Rightarrow$$



$$V=\frac{\sqrt{m_1^2V_1^2+m_2^2V_2^2+2m_1m_2V_1V_2\cos(2\alpha)}}{m_1+m_2}$$

W celu określenia kąta β dzielimy równanie (2) przez (1) stronami

$$tg\beta=\frac{m_2V_2-m_1V_1}{m_1V_1+m_2V_2}tg\alpha$$

Gdyby $m_2V_2<m_1V_1$ *to* $tg\beta<0$ *co oznacza iż zwrot rzut wektora prędkości na oś Oy jest przeciwny do zwrotu wersora* $\vec{j}$ *a zatem* $V_y<0$ *(odwrotnie niż pokazano na rysunku na którym zwroty obu wektorów są zgodne i* $V_y>0$*). Przypadek pokazany na rysunku odpowiada sytuacji gdy* $m_2V_2>m_1V_1$ *oraz* $tg\beta>0$.