Zadanie 8 (serial). Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej: $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie *f(r)* pewna nieznana funkcja odległości ciała r od początku układu współrzędnych). Wiadomo ponadto iż w trakcie ruchu wielkość $r\cos(3\varphi)$ jest stała (gdzie φ -kąt określający położenie ciała w biegunowym układzie współrzędnych).

1) Znaleźć wartość prędkości $v = |\vec{v}|$ w zależności od r.
2) Wyznaczyć zależność $\varphi(t)$-kąta φ od czasu .
3) Wykazać, że wartość siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych) czyli zachodzi $f(r) = \frac{const}{r^3}$.

Znane są warunki początkowe ruchu $r(t=0) = r_0$, $\varphi(t=0) = 0$, $v(t=0) = v_0$.

Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Zależność wartości prędkości v od r można określić wykorzystując postać zależności $r = r(\varphi)$ wynikającą w treści zadania oraz wzory określające energię kinetyczną ciała: $E_{kin} = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right]$ wynikający z rozwiązania zadania 5 oraz $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$. Brakujące stałe można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta.

Wyznaczenie równania toru $r = r(\varphi)$

Z treści zadania wynika iż

$r\cos(3\varphi) = const \Rightarrow r = \dfrac{c}{\cos(3\varphi)}$ (c-stała) (równanie toru) .

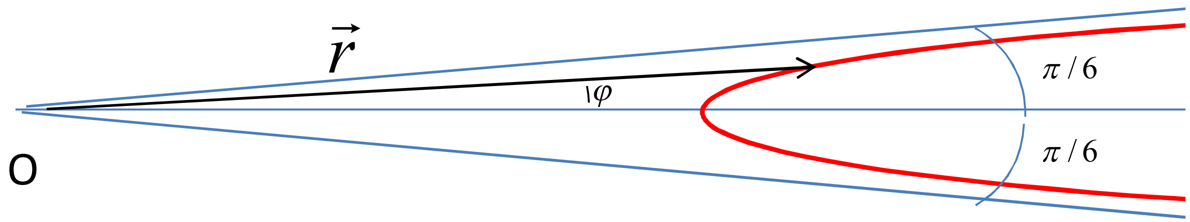
$$r(t=0) = r_0,\ \varphi(t=0) = 0 \Rightarrow \quad r(\varphi = 0) = r_0$$

$$r = \frac{c}{\cos(3\varphi)} \Rightarrow r(\varphi = 0) = c$$

$$c = r_0 \Rightarrow r = \frac{r_0}{\cos(3\varphi)}$$

Ruch ciała odbywa się w zakresie zmian kata φ określonym wzorem $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ dla

którego to zakresu $\cos(3\varphi) \ge 0$ przy czym gdy $\varphi \to \pm\frac{\pi}{6}$ to $r \to \infty$.



Ruch pod wpływem siły centralnej $\Rightarrow$ moment pędu całką ruchu $\vec{L} = const$

Wyznaczenie zależności *v(r)*

W ruchu pod wpływem siły centralnej energia całkowita (będą całką ruchu)

$$E = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right] + V(r)$$

(gdzie $V(r)$ potencjał siły centralnej) .

Energia kinetyczna ciała (która już nie jest stałą ruchu):

$$E_{kin} = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$E_{kin} = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{L^2}{m^2}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right]} = \sqrt{\frac{L^2}{m^2}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos(3\varphi)}{r_0}\right)\right]^2 + \left(\frac{\cos(3\varphi)}{r_0}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{L^2}{m^2}\left[\left[\left(\frac{-3\sin(3\varphi)}{r_0}\right)\right]^2 + \left(\frac{\cos(3\varphi)}{r_0}\right)^2\right]} =$$

$$r = \frac{r_0}{\cos(3\varphi)}$$

$$\upsilon(\varphi) = \frac{|\vec{L}|}{mr_0}\sqrt{9\sin^2(3\varphi) + \cos^2(3\varphi)} = \frac{|\vec{L}|}{mr_0}\sqrt{9 - 8\cos^2(3\varphi)} = \frac{|\vec{L}|}{mr_0}\sqrt{9 - 8\frac{r_0^2}{r^2}}$$

$$r = \frac{r_0}{\cos(3\varphi)} \Rightarrow \cos(3\varphi) = \frac{r_0}{r}$$

Uzależnienie L **od** $|\vec{v}(t=0)| = v_0$

$$\upsilon(t=0)=\upsilon_0,\quad r(t=0)=r_0 \Rightarrow \quad \upsilon(r=r_0)=\upsilon_0$$

$$\upsilon(r)=\frac{|\vec{L}|}{mr_0}\sqrt{9-8\frac{r_0^2}{r^2}} \Rightarrow \upsilon_0=\frac{|\vec{L}|}{mr_0}$$

$$\upsilon(r)=\upsilon_0\sqrt{9-8\frac{r_0^2}{r^2}}$$

Dodatkowo wyznaczono wartość momentu pędu $L=|\vec{L}|=mr_0\upsilon_0$.

Wyznaczenie zależności $\varphi(t)$

Do określenia zależności można wykorzystać relacje:

$L_z = mr^2\dot{\varphi}$

(L_z składowa z-owa momentu pędu, oś Oz prostopadła do płaszczyzny w której odbywa się ruch, $L=|\vec{L}|=|L_z|$)

$$L_z = \pm|\vec{L}| = \pm mr_0\upsilon_0$$

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} \qquad \pm mr_0\upsilon_0 = m\frac{r_0^2}{\cos^2(3\varphi)}\frac{d\varphi}{dt}$$

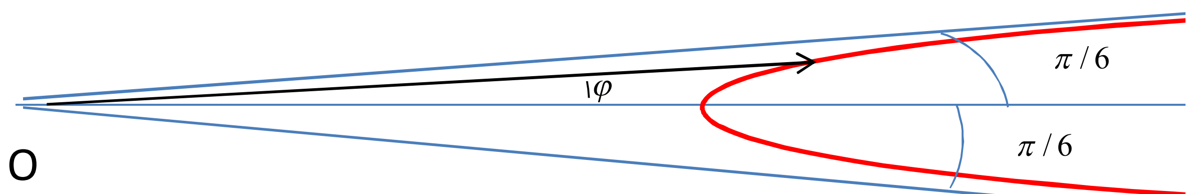
$$\pm m r_0 \upsilon_0 = m \frac{r_0^2}{\cos^2(3\varphi)} \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{\cos^2(3\varphi)} = \pm \frac{\upsilon_0}{r_0} dt \Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\cos^2(3\varphi)} = \pm \frac{\upsilon_0}{r_0} \int dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} tg(3\varphi) = \pm \frac{\upsilon_0}{r_0} t + C$$

Ponieważ $\varphi(t=0) = 0 \Rightarrow \; C = 0$

$$\varphi(t) = \frac{1}{3} arctg\left(\pm \frac{3\upsilon_0}{r_0} t \right) = \pm \frac{1}{3} arctg\left(\frac{3\upsilon_0}{r_0} t \right)$$

Dwa możliwe znaki odzwierciedlają fakt, iż nie znamy kierunku, w jakim porusza się ciało po torze.



Określenie zależności siły centralnej od r $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$

Wykorzystamy wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$

$$r = \frac{r_0}{\cos(3\varphi)} \Rightarrow f(r) = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\cos(3\varphi)}{r_0}\right) + \frac{1}{r}\right] = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{-9\cos(3\varphi)}{r_0} + \frac{1}{r}\right] = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{-9}{r} + \frac{1}{r}\right] = \frac{8L^2}{mr^3}$$

$$\boxed{f(r) = \frac{8m\upsilon_0^2 r_0^2}{r^3}}.$$

Widać, iż wartość siły centralnej jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły, przy czym ponieważ $f(r) > 0$, zaś $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, to siła centralna jest siłą odpychającą.