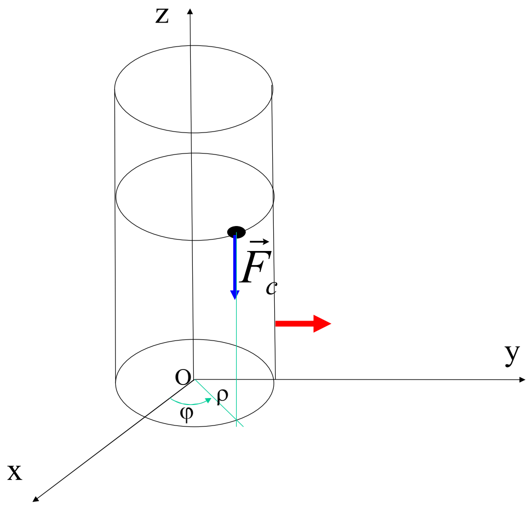
OMNIS 2

Zadanie 7 (seria III)

Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F}=(0,0,-mg)$ po gładkiej, rozszerzającej się powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca ρ równy w chwili początkowej R_0 rozszerza się tak, iż $\rho(t)=R_0+At$ gdzie R_0 i A to dodatnie stałe. Wiadomo ponadto, że w chwili początkowej $z(t=0)=z_0$, $\dot{z}(t=0)=0$, $x(t=0)=R_0$, $\dot{y}(t=0)=\dot{y}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch punktu materialnego. W oparciu o te równania znaleźć całkę ruchu i wyznaczyć ruch punktu materialnego.

Znaleźć uogólnioną energię. Czy jest ona stałą ruchu?



Równanie więzów

a) w układzie cylindrycznym $f(\rho,t)=\rho-R_0-At=0$

b) w układzie kartezjańskim

$$f(x,y,t)=\sqrt{x^2+y^2}-(R_0+At)=0$$

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego | Rzeczpospolita Polska | Dofinansowane przez Unię Europejską | Politechnika Warszawska

Wybór współrzędnych uogólnionych

2 stopnie swobody f=2 → dwie współrzędne uogólnione

Mogą być nimi dwie z trzech współrzędnych służących do określenia położenia ciała w cylindrycznym układzie współrzędnych: z oraz φ (współrzędna ρ nie jest współrzędną uogólnioną).

Związek współrzędnych kartezjańskich z uogólnionymi

$$x = \rho\cos(\varphi) = (R_0 + At)\cos(\varphi) \qquad y = \rho\sin(\varphi) = (R_0 + At)\sin(\varphi)$$

Widać iż równanie więzów nie narzuca żadnych ograniczeń na wartości przyjmowane przez współrzędną φ jak i z.

$$f(x,y,t) = \sqrt{x^2 + y^2} - (R_0 + At) = 0 \Rightarrow R_0 + At - R_0 - At \equiv 0$$

Wyznaczenie energii kinetycznej *T*

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$x = \rho\cos(\varphi) = (R_0 + At)\cos(\varphi) \Rightarrow \qquad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = A\cos(\varphi) - (R_0 + At)\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$y = \rho\sin(\varphi) = (R_0 + At)\sin(\varphi) \Rightarrow \qquad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = A\sin(\varphi) + (R_0 + At)\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(A^2\cos^2(\varphi) - 2A(R_0 + At)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi} + (R_0 + At)^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) + A^2\sin^2(\varphi) + 2A(R_0 + At)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi} + (R_0 + At)^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + \dot{z}^2\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(A^2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) + (R_0 + At)^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(A^2 + (R_0 + At)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Inna metoda wyznaczenia energii kinetycznej $T = \frac{m}{2}\left(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2\right)$

gdzie składowe prędkości w ortogonalnym układzie cylindrycznym $v_\rho = \dot{\rho}$, $v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$, $v_z = \dot{z}$

$$\rho = R_0 + At \Rightarrow \dot{\rho} = A \Rightarrow \; v_\rho = A \quad v_\varphi = \left(R_0 + At\right)\dot{\varphi}$$

$$T(\dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}\left(A^2 \; + (R_0 + At)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Wyznaczenie potencjału $\vec{F} = -gradV$

$$F_x = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \Rightarrow V = V(z) = mgz$$

Ponieważ z jest współrzędną uogólnioną to wzoru na *V* nie trzeba dalej przekształcać

$$F_z = -mg = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(A^2 + \left(R_0 + At\right)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz = L(z, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right)_, - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$ *l=1,.......,f*

$$L(z,\dot{\varphi},\dot{z},t) = \frac{m}{2}\left(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

1) *l*=1, $q_1 = \varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = const$ (1)

Z równania (1) wynika iż wielkość $m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}$ nie zależy od czasu i jest całką (stałą) ruchu.

Jest ona równa pędowi uogólnionemu $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ związanemu ze współrzędną uogólnioną φ.

Jest ona całką ruchu bo współrzędna φ jest współrzędną cykliczną (nie występuje w funkcji Lagrange'a).

2) *l*=2, $q_2 = z \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + mg = 0 \Rightarrow m\ddot{z} + mg = 0 \Rightarrow \ddot{z} = -g$ (2)

Wyznaczenie ruchu ciała

Rozwiązanie równania (2)

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + B \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + Bt + C$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$z(t=0) = z_0 \Rightarrow C = z_0$ $\qquad \dot{z}(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

Analiza równania (1) $m(R_0+At)^2\dot{\varphi}=const$

Oznaczenie $p_\varphi(t)=m(R_0+At)^2\dot{\varphi}$ -pęd uogólniony związany ze współrzędną φ

$$m(R_0+At)^2\dot{\varphi}=const \Leftrightarrow p_\varphi=const \Rightarrow p_\varphi(t)=p_\varphi(t=0) \Rightarrow \quad m(R_0+At)^2\dot{\varphi}=mR_0^2\dot{\varphi}(t=0)$$

Wyznaczenie z warunków początkowych ruchu $\dot{\varphi}(t=0)$

$$x(t=0)=R_0$$

$$x(t)=(R_0+At)\cos(\varphi)\Rightarrow x(t=0)=R_0\cos(\varphi(t=0)) \quad \Rightarrow \cos(\varphi(t=0))=1\Rightarrow \varphi(t=0)=0+2n\pi\overset{np}{=}0$$

$$\dot{y}(t=0)=\dot{y}_0,\varphi(t=0)=0$$

$$\dot{y}(t)=A\sin(\varphi)+(R_0+At)\cdot\cos(\varphi)\dot{\varphi}\Rightarrow \dot{y}(t=0)=A\sin(\varphi(t=0))+R_0\cos(\varphi(t=0))\dot{\varphi}(t=0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_0\dot{\varphi}(t=0)=\dot{y}_0\Rightarrow\dot{\varphi}(t=0)=\frac{\dot{y}_0}{R_0}$$

Przy okazji pokazano iż $\varphi(t=0)=0$

A zatem $m(R_0+At)^2\dot{\varphi}=mR_0^2\dot{\varphi}(t=0)\Rightarrow(R_0+At)^2\dot{\varphi}=R_0\dot{y}_0$

Otrzymane równanie różniczkowe jest rzędu pierwszego podczas gdy równanie otrzymane na drodze policzenia pochodnej po czasie w relacji otrzymanej wcześniej $\frac{d}{dt}\left(m(R_0+At)^2\dot{\varphi}\right)=0$ byłoby równaniem różniczkowym rzędu drugiego

Rozwiązanie równania $(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = R_0 \dot{y}_0$

$$(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = R_0 \dot{y}_0 \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{R_0 \dot{y}_0}{(R_0 + At)^2} \Rightarrow \quad \varphi(t) = R_0 \dot{y}_0 \int \frac{1}{(R_0 + At)^2} dt = -\frac{R_0 \dot{y}_0}{A} \cdot \frac{1}{R_0 + At} + C$$

Wyznaczenie stałej całkowania *C*

$$\varphi(t = 0) = 0$$

$$\varphi(t = 0) = -\frac{\dot{y}_0}{A} + C \quad \Rightarrow C = \frac{\dot{y}_0}{A}$$

A zatem

$$\varphi(t) = -\frac{R_0 \dot{y}_0}{A} \cdot \frac{1}{R_0 + At} + C = -\frac{R_0 \dot{y}_0}{A} \cdot \frac{1}{R_0 + At} + \frac{\dot{y}_0}{A} = \frac{\dot{y}_0}{A}\left[1 - \frac{R_0}{R_0 + At}\right] = \frac{\dot{y}_0 t}{R_0 + At}$$

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Policzenie funkcji *G* (uogólnionej energii) i sprawdzenie czy jest całką ruchu

$$G = \sum_{l=1}^{f} (p_l \dot{q}_l) - L = p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L$$

$$L(z, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = T - V = \frac{m}{2}\left(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$G = p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L = m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$$

$$\boxed{G = \frac{m}{2}\left(-A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz = T + V - mA^2 \neq T + V}$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -mA(R_0 + At)\dot{\varphi}^2 = -mA(R_0 + At)\frac{R_0^2 \dot{y}_0^2}{(R_0 + At)^4} = -mA\frac{R_0^2 \dot{y}_0^2}{(R_0 + At)^3}$$

$$\frac{dG}{dt} \neq 0 \Rightarrow G \neq const \Rightarrow T + V = G + mA^2 \neq const$$

Uogólniona energia nie jest równa energii całkowitej .
Jest tak bo w relacjach $x = (R_0 + At)\cos(\varphi)$ $\quad y = (R_0 + At)\sin(\varphi)$ występuje jawnie czas
Uogólniona energia jak i energia określona jako T+V nie są całkami ruchu.
Energia nie jest całką ruchu bo siła reakcji więzów reonomicznych wykonuje (ujemną) pracę

Gdyby *A*=0 to wiąz skleronomiczny (walec o stałym promieniu) i brak czasu w relacjach
$x = R_0 \cos(\varphi)$ $y = R_0 \sin(\varphi)$ .A zatem uogólniona energia G=T+V .
Dodatkowo T+V byłaby całką ruchu bo siła reakcji nie wykonywałaby pracy.