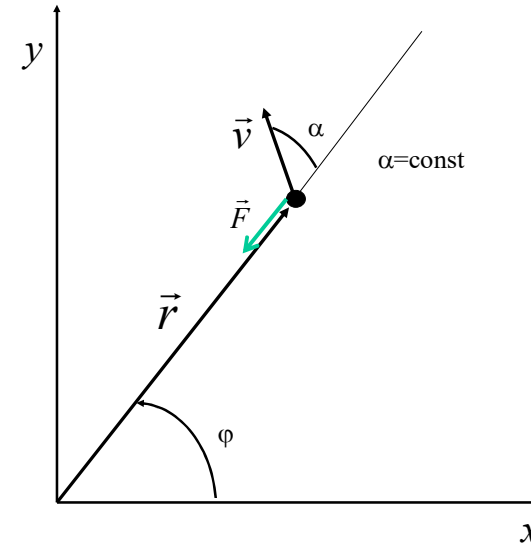




OMNIS2

Zadanie 7 (seria I). Punkt materialny o masie m porusza się po płaszczyźnie pod wpływem siły centralnej skierowanej w kierunku początku układu współrzędnych. Wiadomo iż w trakcie ruchu wektor wodzący punktu materialnego $\vec{r}$ tworzy **stały w czasie** kąt α z wektorem jego prędkości $\vec{v}$, zaś odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych $r = |\vec{r}|$ oraz miara kąta φ jaki tworzy jego wektor wodzący z osią Ox rośnie. Ponadto wiadomo, iż w chwili $t=0$ odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych wynosiła $r(t=0) = r_0$, przy czym kąt jaki wektor wodzący punktu materialnego tworzył z osią Ox był równy $\varphi(t=0) = 0$. **Ponadto wartość prędkości punktu materialnego w chwili $t=0$ była równa $v(t=0) = v_0$.**

- 1) Określić równanie toru po którym porusza się to ciało.
- 2) Określić zależności od czasu:
 - a) kąta jaki jego wektor wodzący tworzył z osią Ox czyli określić postać zależności $\varphi(t)$.
 - b) odległości punktu materialnego od początku układu współrzędnych czyli określić postać zależności $r(t)$.
- 3) Pokazać iż wypadkowa siła działająca na ciało jest odwrotnie proporcjonalna do 3 potęgi odległości od centrum siły. Określić wartość siły w chwili czasu $t=0$.
- 4) Określić wartość energii punktu materialnego przy założeniu iż wartość energii potencjalnej w nieskończonej odległości od centrum siły jest równa 0.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

W układzie biegunowym

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

gdzie

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Z faktu iż $\alpha = \text{const}$ oraz
załączonego rysunku wynika iż

$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r|}{|\vec{v}_\varphi|} = \frac{v_r}{v_\varphi} = \text{const}$$

A zatem

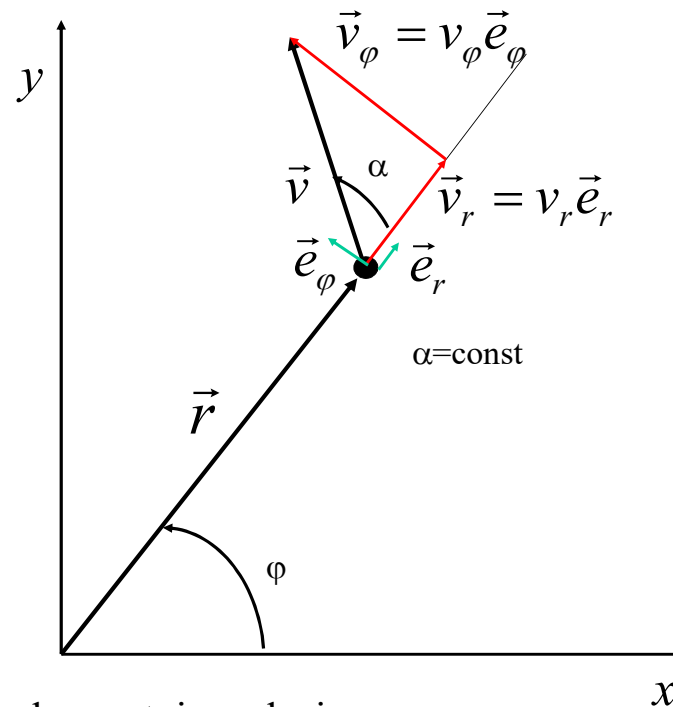
$$\text{const} = \text{ctg}(\alpha) = \frac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}} \quad (1)$$

Można wyeliminować zależność od czasu wykorzystując relacje

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \quad (2)$$

Z (1) i (2) wynika iż

$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}}{r\dot{\varphi}} = \frac{dr}{r d\varphi}$$



Otrzymaliśmy równanie różniczkowe:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{ctg}(\alpha)$$

Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych

Mnożymy obustronnie równanie przez $\frac{d\varphi}{r}$ i otrzymujemy

$$\frac{1}{r} dr = \operatorname{ctg}(\alpha) d\varphi$$

Całkujemy obustronnie

$$\int \frac{1}{r} dr = \int \operatorname{ctg}(\alpha) d\varphi$$

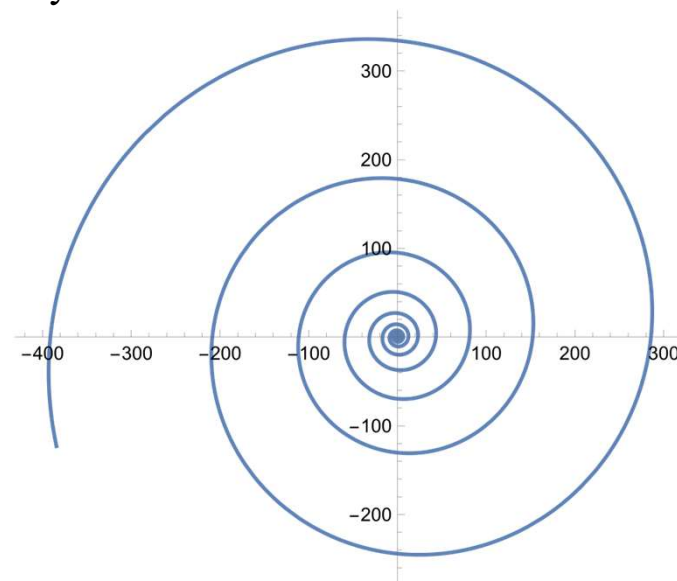
$$\ln(r) = \operatorname{ctg}(\alpha)\varphi + C \quad \text{gdzie } C\text{-stała całkowania}$$

Z warunku zadania $r(\varphi = 0) = r_0$ wynika równanie

$$\ln(r_0) = C \quad \text{czyli}$$

$$\ln(r) = \operatorname{ctg}(\alpha)\varphi + \ln(r_0) \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \operatorname{ctg}(\alpha)\varphi \Rightarrow \frac{r}{r_0} = \exp(\operatorname{ctg}(\alpha)\varphi) \Rightarrow r = r_0 \exp(\operatorname{ctg}(\alpha)\varphi)$$

Znalezione równanie jest równaniem spirali logarytmicznej



W analizowanym ruchu moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ jest stałą ruchu bo $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ i

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} f(r) = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Wyznaczenie zależności $\varphi(t)$ w oparciu o relację $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ (L_z składowa z-owa momentu pędu, oś Oz prostopadła do płaszczyzny w której odbywa się ruch, $L = |\vec{L}| = |L_z|$)

$$L_z = const = L_z(t=0) = |\vec{L}| = mr_0 v_0 \sin(\alpha) \quad (\text{znak + bo } \varphi \text{ rośnie w trakcie ruchu})$$

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad mr_0 v_0 \sin(\alpha) = mr_0^2 \exp(2ctg(\alpha)\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$r = r_0 \exp(ctg(\alpha)\varphi) \quad \exp(2ctg(\alpha)\varphi) d\varphi = \pm \frac{v_0 \sin(\alpha)}{r_0} dt \Rightarrow$$

$$\int \exp(2ctg(\alpha)\varphi) d\varphi = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{r_0} \int dt \Rightarrow \frac{1}{2ctg(\alpha)} \exp(2ctg(\alpha)\varphi) = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{r_0} t + C$$

$$\text{Ponieważ } \varphi(t=0) = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2tg(\alpha)} = \frac{1}{2}tg(\alpha)$$

$$\frac{1}{2}tg(\alpha)[\exp(2ctg(\alpha)\varphi) - 1] = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{r_0} t \Rightarrow \exp(2ctg(\alpha)\varphi) - 1 = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{r_0 tg(\alpha)} t \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{2}tg(\alpha) \ln \left(\frac{2v_0 \cos(\alpha)}{r_0} t + 1 \right)$$

Określenie zależności $r(t)$

$$\begin{aligned} r &= r_0 \exp(ctg(\alpha)\varphi) = r_0 \exp\left(ctg(\alpha)\frac{1}{2}tg(\alpha)\ln\left(\frac{2v_0 \cos(\alpha)t}{r_0} + 1\right)\right) = \\ &= r_0 \exp\left(\ln\left(\sqrt{\frac{2v_0 \cos(\alpha)t}{r_0} + 1}\right)\right) = r_0 \sqrt{\frac{2v_0 \cos(\alpha)t}{r_0} + 1} \end{aligned}$$

Inny sposób określenia zależności $r(t)$

$$ctg(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r|}{|\vec{v}_\varphi|} = \frac{v_r}{v_\varphi} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}} = \frac{\dot{r}}{r \frac{L_z}{mr^2}} = \frac{m}{L_z} r \dot{r}$$

$$\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{m}{mr_0 v_0 \sin(\alpha)} r \dot{r} \Rightarrow r_0 v_0 \cos(\alpha) = r \frac{dr}{dt} \Rightarrow r_0 v_0 \cos(\alpha) dt = r dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int r_0 v_0 \cos(\alpha) dt = \int r dr \Rightarrow r_0 v_0 \cos(\alpha) t = \frac{1}{2} r^2 + C$$

$$\text{Ponieważ } r(t=0)=r_0 \text{ to } C = -\frac{1}{2}r_0^2 \quad r_0 v_0 \cos(\alpha) t = \frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) \Rightarrow r = r_0 \sqrt{\frac{2v_0 \cos(\alpha)t}{r_0} + 1}$$

W ruchu pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ zachodzi $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$

Podany powyżej i udowodniony w dodatku wzór Bineta pozwala na określenie **zależności $f(r)$ od odległości ciała od centrum siły r** gdy znamy równanie toru $r(\varphi)$ i wartość momentu pędu L

$$r = r_0 \exp(ctg(\alpha)\varphi) \Rightarrow f(r) = \frac{L^2}{mr^2} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\exp(-ctg(\alpha)\varphi)}{r_0} \right) + \frac{1}{r} \right\}$$

$$f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left\{ ctg^2(\alpha) \left(\frac{\exp(-ctg(\alpha)\varphi)}{r_0} \right) + \frac{1}{r} \right\} = -\frac{L^2}{mr^2} \left\{ ctg^2(\alpha) \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right\} = -\frac{L^2}{mr^3} \{ ctg^2(\alpha) + 1 \} = -\frac{L^2}{mr^3 \sin^2(\alpha)} \propto \frac{1}{r^3}$$

$$L = mr_0 v_0 \sin(\alpha) \Rightarrow f(r) = -\frac{m^2 r_0^2 v_0^2 \sin^2(\alpha)}{mr^3 \sin^2(\alpha)} = -\frac{mr_0^2 v_0^2}{r^3}$$

Widać iż siła centralna $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ jest odwrotnie proporcjonalna do 3 potęgi odległości od centrum siły, przy czym ujemny znak $f(r)$ wskazuje na to iż siła ta jest skierowana w kierunku centrum siły

Wartość siły w chwili czasu $t=0$ jest równa $F(t=0) = |f(r=r_0)| = \frac{mv_0^2}{r_0}$

Określenie energii ciała w tym ruchu

Wyznaczenie energii potencjalnej

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int f(r)dr = -\int -\frac{mr_0^2 v_0^2}{r^3} dr = -\frac{mr_0^2 v_0^2}{2r^2} + C$$

$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Znajdź $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ gdy $C=0$.

Wyznaczenie energii całkowitej będącej całką ruchu na drodze określenia jej w chwili $t=0$

$$E = \text{const} = E(t=0) = T(t=0) + V(t=0) = \frac{m}{2} v_0^2 + V(r=r_0) = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{mr_0^2 v_0^2}{2r_0^2} = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{m}{2} v_0^2 = 0$$

Dodatek: Dowód wzoru Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

W układzie biegunowym przyspieszenie $\vec{r} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi$ gdzie $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$
 $a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$

Z II zasady dynamiki $m\ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = f(r) \vec{e}_r \Rightarrow$
 $ma_r = f(r) \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)$
 $ma_\varphi = 0 \Rightarrow m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$

Ponieważ $L_z = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2}$, $L_z^2 = L^2$ to $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r) \Rightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3}\right) = f(r)$

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L_z}{mr^2} \leftarrow -\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \dot{\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \frac{L_z}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m \left(-\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = f(r)$$