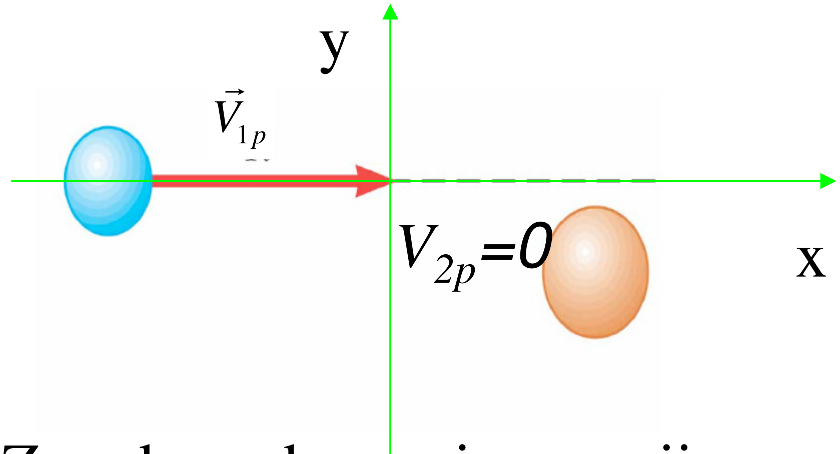
Zad. 7 (seria III). Kula o masie m_1 i szybkości V_{1p} zderza się sprężyście niecentralnie z inną kulą znajdującą się w spoczynku o masie $m_2 = 3m_1$. Po zderzeniu kula o masie m_2 porusza się pod katem $\phi < \frac{\pi}{2}$ względem pierwotnego kierunku ruchu kuli o masie m_1. Znaleźć szybkości V_{1k} oraz V_{2k} obu kul po zderzeniu.

Dane: $m_2/m_1=3$, V_{1p}, ϕ

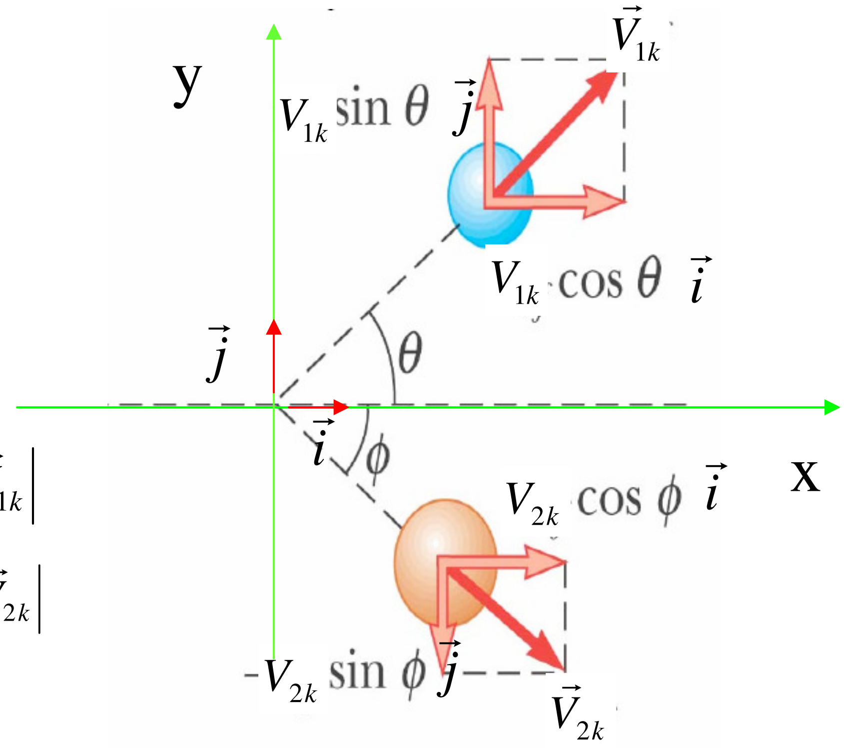
Szukane: V_{1k}, V_{2k}

Zderzenie sprężyste (niecentralne) ciała poruszającego się z ciałem spoczywającym

Przed zderzeniem



Po zderzeniu



$$V_{1k}=\left|\vec{V}_{1k}\right|$$

$$V_{2k}=\left|\vec{V}_{2k}\right|$$

Zasada zachowania energii

$$\frac{m_1V_{1p}^2}{2}=\frac{m_1V_{1k}^2}{2}+\frac{m_2V_{2k}^2}{2}$$

Zasada zachowania pędu

$$m_1V_{1p}=m_1V_{1k}\cos(\theta)+m_2V_{2k}\cos(\phi)$$ Składowa x pędu

$$0=m_1V_{1k}\sin(\theta)-m_2V_{2k}\sin(\phi)$$ Składowa y pędu

Do określenia ruchu układu po zderzeniu trzeba znać oprócz prędkości $\vec{V}_{1p}$ jedną z 4 wielkości: V_{1k}, V_{2k}, θ, ϕ opisujących ruch obu ciał po zderzeniu W zadaniu jest nią kąt ϕ.

$m_2 = 3m_1$

$$\frac{m_1 V_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2} \Rightarrow V_{1p}^2 = V_{1k}^2 + 3V_{2k}^2 \qquad (1)$$

$$m_1 V_{1p} = m_1 V_{1k}\cos(\theta) + m_2 V_{2k}\cos(\phi) \Rightarrow V_{1p} = V_{1k}\cos(\theta) + 3V_{2k}\cos(\phi) \qquad (2)$$

$$0 = m_1 V_{1k}\sin(\theta) - m_2 V_{2k}\sin(\phi) \Rightarrow 0 = V_{1k}\sin(\theta) - 3V_{2k}\sin(\phi) \qquad (3)$$

Z (2) $\cos(\theta) = \dfrac{V_{1p} - 3V_{2k}\cos(\phi)}{V_{1k}}$ Z (3) $\sin(\theta) = \dfrac{3V_{2k}\sin(\phi)}{V_{1k}}$

$$1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right)}{V_{1k}^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2$$

Z (1) $V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 \longrightarrow V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2$

$$V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 9V_{2k}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6V_{1p}V_{2k}\cos(\phi) + 12V_{2k}^2 = 0 \Rightarrow V_{2k} = \frac{1}{2}V_{1p}\cos(\phi)$$

$$V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2(\phi)\right) = \frac{V_{1p}^2}{4}\left(4 - 3\cos^2(\phi)\right)$$

$$V_{1k} = \frac{V_{1p}}{2}\sqrt{4 - 3\cos^2(\phi)}$$