

Zadanie 7 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, będącej siłą centralną. Ponadto siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od początku układu współrzędnych, tzn. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$. W oparciu o równania ruchu pokazać, iż wektor Runge-Lentza zdefiniowany wzorem: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$

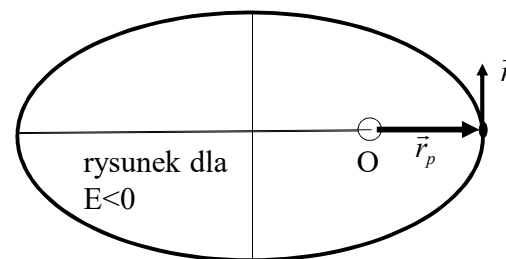
(gdzie $\vec{L}$ -moment pędu ciała)

a) jest stały w trakcie ruchu ciała

b) słuszny jest wzór: $\vec{M} = |\alpha|\varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ gdzie $\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$, wektor

$\vec{r}_p$ jest promieniem wodzącym punktu na torze ciała najbliższym położonym od początku układu współrzędnych.

(ze wzoru tego wynika m.in. iż wektor jest Runge-Lentza jest równoległy do dużej półosi elipsy o mimośrodku ε , będącej torem ruchu ciała w przypadku gdy energia ciała jest ujemna $E < 0$)



Wsk.

- Skorzystać z zasady zachowania momentu pędu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ dla dowolnych wektorów $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$
- Aby udowodnić wzór $\vec{M} = |\alpha|\varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ wygodnie jest obliczyć wektor $\vec{M}$ w punkcie w którym odległość ciała od centrum siły (początku układu współrzędnych) jest najmniejsza.

Ad a)

Obiekt jest stałą ruchu gdy jego pochodna zupełna po czasie jest równa zero

$$\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \frac{d\vec{M}}{dt} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} - \alpha \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \dot{\vec{r}} - \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \dot{r} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{L} = \text{const} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \Rightarrow \frac{d\vec{M}}{dt} = \ddot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r}$$

$\swarrow$
 $\dot{\vec{L}} = 0$

Z II zasady dynamiki Newtona

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{mr^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\alpha}{mr^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})] - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r} = -\frac{\alpha}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \Rightarrow$$

$$[\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] = \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r}r \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right) - \dot{\vec{r}}r \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \right) = \vec{r}r(\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}r(\vec{e}_r \cdot \vec{r}) \equiv \vec{r}r\dot{r} - \dot{\vec{r}}r^2$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r} = -\frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r} + \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2} \vec{r} = 0$$

$$\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{r}} = v_r = \dot{r}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{r} = r_r = r$$

Pokazać iż $\vec{M} = |\alpha| \varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$ $\varepsilon = \sqrt{1 + E \frac{2L^2}{m\alpha^2}}$

$$\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \Rightarrow \vec{M} = m\vec{r}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - m\dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

Ponieważ $\vec{M}$ jest stały to można go określić w peryhelium

$$\vec{M} = m\vec{r}_p(\dot{\vec{r}}_p \cdot \dot{\vec{r}}_p) - m\dot{\vec{r}}_p(\dot{\vec{r}}_p \cdot \vec{r}_p) - \alpha \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

W peryhelium $\dot{\vec{r}}_p \perp \vec{r}_p \Rightarrow \dot{\vec{r}}_p \cdot \vec{r}_p = 0$

$$\dot{\vec{r}}_p \perp \vec{r}_p \Rightarrow \dot{\vec{r}}_p = r_p \dot{\phi}_p \vec{e}_\phi + \dot{r}_p \vec{e}_r = r_p \dot{\phi}_p \vec{e}_\phi \Rightarrow \dot{\vec{r}}_p \cdot \dot{\vec{r}}_p = r_p^2 \dot{\phi}_p^2$$

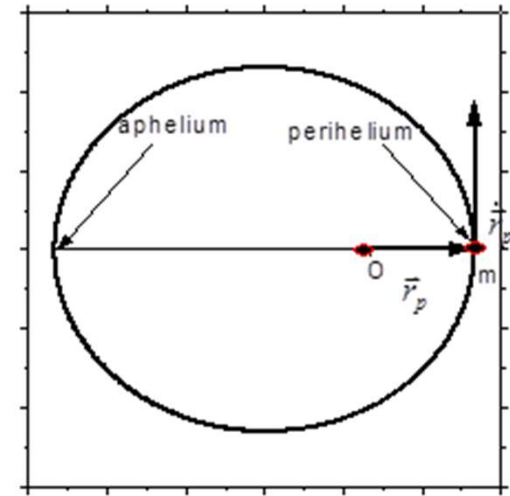
$$\vec{M} = m\vec{r}_p r_p^2 \dot{\phi}_p^2 - \alpha \frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(m r_p^3 \dot{\phi}_p^2 - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

Wektor $\vec{M}$ ma ten sam kierunek co wektor $\vec{r}_p$.

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z \Rightarrow \dot{\phi}_p^2 = \frac{L^2}{m^2 r_p^4} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{L^2}{m r_p} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

Trzeba wyrazić r_p przez E i L

$\vec{e}_z$ -wesor określający zwrot osi Oz prostopadły do płaszczyzny w której odbywa się ruch



Energia poruszającego się ciała jest stała i może być określona w peryhelium:

$$E = \frac{m\dot{\vec{r}}_p^2}{2} + V(r=r_p) = \frac{m\dot{\vec{r}}_p \cdot \dot{\vec{r}}_p}{2} - \frac{\alpha}{r_p} = \frac{mr_p^2\dot{\phi}_p^2}{2} - \frac{\alpha}{r_p} = \frac{mr_p^2 \frac{L^2}{m^2 r_p^4}}{2} - \frac{\alpha}{r_p} = \frac{L^2}{2mr_p^2} - \frac{\alpha}{r_p}$$

Otrzymaliśmy równanie, z którego możemy wyznaczyć r_p .

Wprowadzając nową zmienną $u_p = \frac{1}{r_p}$ mamy

$$E = \frac{L^2}{2m} u_p^2 - \alpha u_p \Rightarrow \frac{L^2}{2m} u_p^2 - \alpha u_p - E = 0$$

Rozwiązania równania kwadratowego mają postać:

$$u_p = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{4L^2 E}{2m}}}{2 \frac{L^2}{2m}} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 \left(1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}\right)}}{\frac{L^2}{m}} = \frac{m\alpha}{L^2} + \frac{m|\alpha|}{L^2} \varepsilon$$

$$\text{gdzie } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} \geq 0$$

$$u_p = \frac{m\alpha}{L^2} \pm \frac{m|\alpha|}{L^2} \varepsilon$$

Przypadek gdy $\alpha > 0$ (siła przyciągająca)

$$\alpha = |\alpha| \Rightarrow u_p = \frac{m|\alpha|}{L^2} (1 \pm \varepsilon) \Rightarrow r_p = \frac{1}{u_p} = \frac{L^2}{m|\alpha|(1 \pm \varepsilon)} = \frac{P}{1 \pm \varepsilon} \quad \text{gdzie } P = \frac{L^2}{m|\alpha|} > 0 \text{ (zakładamy iż } L \neq 0 \text{)}.$$

Gdy $\varepsilon < 1$ to ruch po elipsie i rozwiązanie ze znakiem $+$ odpowiada peryhelium (gdy r osiąga wartość minimalną), rozwiązanie ze znakiem $-$ odpowiada zaś aphelium (gdy r osiąga wartość maksymalną).

$$\text{A zatem } r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon}.$$

Gdy $\varepsilon > 1$ to ruch odbywa się hiperboli i wówczas rozwiązanie ze znakiem minus jest ujemne i go odrzucamy gdyż współrzędna radialna r nie może być ujemna. A zatem w tym przypadku mamy

$$r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon}.$$

Gdy $\varepsilon = 1$ (ruch po paraboli) to rozwiązanie ze znakiem minus odpowiada nieskończonemu r i także go odrzucamy. A zatem w tym przypadku również mamy $r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon}$.

Wynika z tego iż wówczas gdy $\alpha > 0$ to

$$r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon} \quad (**)$$

Wyrażenie (**) $r_p = \frac{P}{1+\varepsilon}$ otrzymać można też z równania toru ciała dla przypadku siły przyciągającej $r = \frac{P}{1+\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$ wykorzystując to, iż r_p odpowiada minimalnej wartości wyrażenia na r . Znajomość wzoru określającego równanie toru nie jest jednak niezbędna do określenia wartości r_p .

$$r_p = \frac{P}{1+\varepsilon} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{L^2}{mr_p} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(\frac{L^2(1+\varepsilon)}{mP} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

$$P = \frac{L^2}{m|\alpha|} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{L^2(1+\varepsilon)m|\alpha|}{mL^2} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = (|\alpha|(1+\varepsilon) - |\alpha|) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = |\alpha|\varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

Przypadek $\alpha < 0$

$\alpha = -|\alpha|$ siła odpychająca

$$u_p = \frac{m\alpha}{L^2} \pm \frac{m|\alpha|}{L^2} \varepsilon \quad \rightarrow \quad u_p = \frac{m|\alpha|}{L^2} (-1 \pm \varepsilon)$$

$$r_p = \frac{1}{u_p} = \frac{L^2}{m|\alpha|(-1 \pm \varepsilon)} = \frac{P}{-1 \pm \varepsilon}$$

gdzie $P = \frac{L^2}{m|\alpha|} > 0$ (zakładamy iż $L \neq 0$).

Rozwiązanie ze znakiem minus $r_p = \frac{P}{-1 - \varepsilon}$ zawsze odpowiada ujemnemu r i trzeba go odrzucić.

A zatem trzeba przyjąć iż

$$r_p = \frac{P}{-1 + \varepsilon} \quad (***)$$

przy czym ruch ciała w tym przypadku może zachodzić tylko wówczas gdy $\varepsilon > 1$. (hiperbola)

Wyrażenie (***) $r_p = \frac{P}{-1 + \varepsilon}$ otrzymać można też z równania toru ciała dla przypadku siły odpychającej $r = \frac{P}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$ wykorzystując to, iż r_p odpowiada minimalnej wartości wyrażenia na r . Znajomość wzoru określającego równanie toru nie jest jednak niezbędna do określenia wartości r_p .

$$\vec{M} = \left(\frac{L^2}{mr_p} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

$$r_p = \frac{P}{-1 + \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\vec{M} = \left(\frac{L^2}{mr_p} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(\frac{L^2(-1 + \varepsilon)}{mP} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(\frac{L^2(-1 + \varepsilon)m|\alpha|}{mL^2} - \alpha \right) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = (|\alpha|(-1 + \varepsilon) + |\alpha|) \frac{\vec{r}_p}{r_p} = |\alpha|\varepsilon \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$