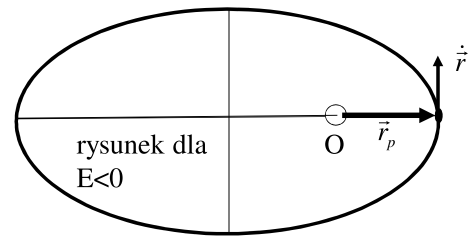
Zadanie 7 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, będącej siłą centralną. Ponadto siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od początku układu współrzędnych, tzn. $f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$. W oparciu o równania ruchu pokazać, iż wektor Runge-Lentz'a zdefiniowany wzorem: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $\vec{L}$-moment pędu ciała)

a) jest stały w trakcie ruchu ciała

b) słuszny jest wzór: $\vec{M} = |\alpha|\varepsilon\frac{\vec{r}_p}{r_p}$ gdzie $\varepsilon = \sqrt{1 + E\frac{2L^2}{m\alpha^2}}$**,** wektor $\vec{r}_p$ jest promieniem wodzącym punktu na torze ciała najbliżej położonym od początku układu współrzędnych**.** (ze wzoru tego wynika m.in. iż wektor jest Runge-Lentz'a jest równoległy do dużej półosi elipsy o mimośrodzie ε, będącej torem ruchu ciała w przypadku gdy energia ciała jest ujemna $E < 0$)



Wsk.

- Skorzystać z zasady zachowania momentu pędu: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ dla dowolnych wektorów $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$
- Aby udowodnić wzór $\vec{M} = |\alpha|\varepsilon\frac{\vec{r}_p}{r_p}$ wygodnie jest obliczyć wektor $\vec{M}$ w punkcie w którym odległość ciała od centrum siły (początku układu współrzędnych) jest najmniejsza.

Ad a)
Obiekt jest stałą ruchu gdy jego pochodna zupełna po czasie jest równa zeru

$$\vec M = \dot{\vec r}\times\vec L - \alpha\frac{\vec r}{r} \Rightarrow \frac{d\vec M}{dt} = \ddot{\vec r}\times\vec L + \dot{\vec r}\times\dot{\vec L} - \alpha\frac{\partial}{\partial\vec r}\left(\frac{\vec r}{r}\right)\dot{\vec r} - \alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec r}{r}\right)\dot r = \ddot{\vec r}\times\vec L + \dot{\vec r}\times\dot{\vec L} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} + \frac{\alpha\vec r}{r^2}\dot r$$

$$\vec L = const = \vec r\times m\dot{\vec r} \Rightarrow \frac{d\vec M}{dt} = \ddot{\vec r}\times\left(\vec r\times m\dot{\vec r}\right) - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} + \frac{\alpha\dot r}{r^2}\vec r$$

$$\dot{\vec L} = 0$$

Z II zasady dynamiki Newtona

$$m\ddot{\vec r} = f(r)\frac{\vec r}{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec r}{r} \Rightarrow \ddot{\vec r} = -\frac{\alpha}{mr^2}\frac{\vec r}{r}$$

$$\frac{d\vec M}{dt} = -\frac{\alpha}{mr^3}\left[\vec r\times\left(\vec r\times m\dot{\vec r}\right)\right] - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} + \frac{\alpha\dot r}{r^2}\vec r = -\frac{\alpha}{r^3}\left[\vec r\times\left(\vec r\times\dot{\vec r}\right)\right] - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} + \frac{\alpha\dot r}{r^2}\vec r$$

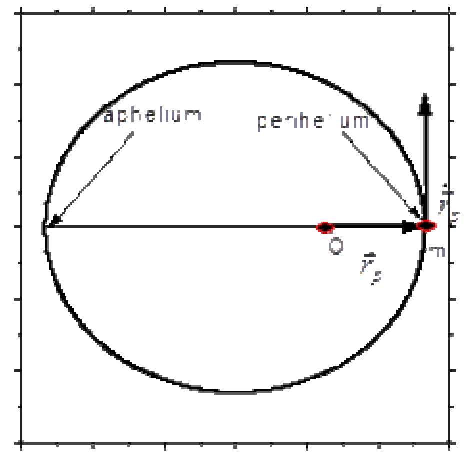
$$\vec A\times\left(\vec B\times\vec C\right) = \vec B\left(\vec A\cdot\vec C\right) - \vec C\left(\vec A\cdot\vec B\right) \Rightarrow$$

$$\left[\vec r\times\left(\vec r\times\dot{\vec r}\right)\right] = \vec r\left(\vec r\cdot\dot{\vec r}\right) - \dot{\vec r}\left(\vec r\cdot\vec r\right) = \vec r r\left(\frac{\vec r}{r}\cdot\dot{\vec r}\right) - \dot{\vec r}r\left(\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r\right) = \vec r r\left(\vec e_r\cdot\dot{\vec r}\right) - \dot{\vec r}r\left(\vec e_r\cdot\vec r\right) = \vec r r\dot r - \dot{\vec r}r^2$$

$$\frac{d\vec M}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3}\left[\vec r\times\left(\vec r\times\dot{\vec r}\right)\right] - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} + \frac{\alpha\dot r}{r^2}\vec r = -\frac{\alpha\dot r}{r^2}\vec r + \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec r} + \frac{\alpha\dot r}{r^2}\vec r = 0$$

$$\vec e_r\cdot\dot{\vec r} = v_r = \dot r \qquad \vec e_r\cdot\vec r = r_r = r$$

Pokazać iż $\vec{M} = |\alpha|\varepsilon\dfrac{\vec{r}_p}{r_p}$ $\qquad \varepsilon = \sqrt{1 + E\dfrac{2L^2}{m\alpha^2}}$



$$\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r} = \dot{\vec{r}} \times \left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \Rightarrow \vec{M} = m\vec{r}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) - m\dot{\vec{r}}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}\right) - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$$

Ponieważ $\vec{M}$ jest stały to można go określić w peryhelium

$$\vec{M} = m\vec{r}_p\left(\dot{\vec{r}}_p \cdot \dot{\vec{r}}_p\right) - m\dot{\vec{r}}_p\left(\dot{\vec{r}}_p \cdot \vec{r}_p\right) - \alpha\frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

W peryhelium $\dot{\vec{r}}_p \perp \vec{r}_p \Rightarrow \dot{\vec{r}}_p \cdot \vec{r}_p = 0$

$$\dot{\vec{r}}_p \perp \vec{r}_p \Rightarrow \dot{\vec{r}}_p = r_p\dot{\varphi}_p\vec{e}_\varphi + \dot{r}_p\vec{e}_r = r_p\dot{\varphi}_p\vec{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\vec{r}}_p \cdot \dot{\vec{r}}_p = r_p^2\dot{\varphi}_p^2$$

$$\vec{M} = m\vec{r}_p r_p^2\dot{\varphi}_p^2 - \alpha\frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(mr_p^3\dot{\varphi}_p^2 - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

Wektor $\vec{M}$ ma ten sam kierunek co wektor $\vec{r}_p$.

$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_p^2 = \dfrac{L^2}{m^2 r_p^4} \Rightarrow \vec{M} = \left(\dfrac{L^2}{mr_p} - \alpha\right)\dfrac{\vec{r}_p}{r_p}$ Trzeba wyrazić r_p przez E i L

$\vec{e}_z$ -wersor określający zwrot osi Oz prostopadły do płaszczyzny w której odbywa się ruch

Energia poruszającego się ciała jest stała i może być określona w peryhelium:

$$E=\frac{m\dot{\vec{r}}_p^{\,2}}{2}+V(r=r_p)=\frac{m\dot{\vec{r}}_p\cdot\dot{\vec{r}}_p}{2}-\frac{\alpha}{r_p}=\frac{mr_p^2\dot{\varphi}_p^2}{2}-\frac{\alpha}{r_p}=\frac{mr_p^2\frac{L^2}{m^2r_p^4}}{2}-\frac{\alpha}{r_p}=\frac{L^2}{2mr_p^2}-\frac{\alpha}{r_p}$$

Otrzymaliśmy równanie, z którego możemy wyznaczyć r_p .

Wprowadzając nową zmienną $u_p=\dfrac{1}{r_p}$ mamy

$$E=\frac{L^2}{2m}u_p^2-\alpha u_p\Rightarrow\quad u_p^2-\frac{2m\alpha}{L^2}u_p-\frac{2mE}{L^2}=0$$

Rozwiązania równania kwadratowego mają postać:

$$u_p=\frac{\frac{2m\alpha}{L^2}\pm\sqrt{\frac{4m^2\alpha^2}{L^4}+\frac{8mE}{L^2}}}{2}=\quad\frac{m\alpha}{L^2}\pm\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^4}\left(1+\frac{2L^2E}{m\alpha^2}\right)}=\frac{m\alpha}{L^2}\pm\frac{m|\alpha|}{L^2}\varepsilon$$

gdzie $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2L^2E}{m\alpha^2}}\geq 0$

$$u_p = \frac{m\alpha}{L^2} \pm \frac{m|\alpha|}{L^2}\varepsilon$$

Przypadek gdy $\alpha > 0$ (siła przyciągająca)

$$\alpha = |\alpha| \quad \Rightarrow u_p = \frac{m|\alpha|}{L^2}(1 \pm \varepsilon) \Rightarrow r_p = \frac{1}{u_p} = \frac{L^2}{m|\alpha|(1 \pm \varepsilon)} = \frac{P}{1 \pm \varepsilon}$$ gdzie $P = \frac{L^2}{m|\alpha|} > 0$ (zakładamy iż $L \neq 0$).

Gdy $\varepsilon < 1$ to ruch po elipsie i rozwiązanie ze znakiem + odpowiada peryhelium (gdy r osiąga wartość minimalną), rozwiązanie ze znakiem - odpowiada zaś aphelium (gdy r osiąga wartość maksymalną).

A zatem $r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon}$.

Gdy $\varepsilon > 1$ to ruch odbywa się hiperboli i wówczas rozwiązanie ze znakiem minus jest ujemne i go odrzucamy gdyż współrzędna radialna r nie może być ujemna. A zatem w tym przypadku mamy $r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon}$.

Gdy $\varepsilon = 1$ (ruch po paraboli) to rozwiązanie ze znakiem minus odpowiada nieskończonemu r i także go odrzucamy. A zatem w tym przypadku również mamy $r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon}$.

Wynika z tego iż wówczas gdy $\alpha > 0$ to

$$r_p = \frac{P}{1 + \varepsilon} \qquad (**)$$

Wyrażenie (**) $r_p = \frac{P}{1+\varepsilon}$ otrzymać można też z równania toru ciała dla przypadku siły przyciągającej $r = \frac{P}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$ wykorzystując to, iż r_p odpowiada minimalnej wartości wyrażenia na *r*. Znajomość wzoru określającego równanie toru nie jest jednak niezbędna do określenia wartości r_p.

$$r_p = \frac{P}{1+\varepsilon} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{L^2}{mr_p} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(\frac{L^2(1+\varepsilon)}{mP} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

$$P = \frac{L^2}{m|\alpha|} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{L^2(1+\varepsilon)m|\alpha|}{mL^2} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = (|\alpha|(1+\varepsilon) - |\alpha|)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = |\alpha|\varepsilon\frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

Przypadek $\alpha < 0$

$\alpha = -|\alpha|$ siła odpychająca

$$u_p = \frac{m\alpha}{L^2} \pm \frac{m|\alpha|}{L^2}\varepsilon$$

$$u_p = \frac{m|\alpha|}{L^2}(-1 \pm \varepsilon)$$

$$r_p = \frac{1}{u_p} = \frac{L^2}{m|\alpha|(-1\pm\varepsilon)} = \frac{P}{-1\pm\varepsilon}$$

gdzie $P = \frac{L^2}{m|\alpha|} > 0$ (zakładamy iż $L \neq 0$).

Rozwiązanie ze znakiem minus $r_p = \frac{P}{-1-\varepsilon}$ zawsze odpowiada ujemnemu *r* i trzeba go odrzucić.

A zatem trzeba przyjąć iż

$$r_p = \frac{P}{-1+\varepsilon} \qquad (***)$$

przy czym ruch ciała w tym przypadku może zachodzić tylko wówczas gdy $\varepsilon > 1$. (hiperbola)

Wyrażenie (***) $r_p = \dfrac{P}{-1+\varepsilon}$ otrzymać można też z równania toru ciała dla przypadku siły odpychającej $r = \dfrac{P}{-1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$ wykorzystując to, iż r_p odpowiada minimalnej wartości wyrażenia na r. Znajomość wzoru określającego równanie toru nie jest jednak niezbędna do określenia wartości r_p.

$$\vec{M} = \left(\frac{L^2}{mr_p} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

$$r_p = \frac{P}{-1+\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\vec{M} = \left(\frac{L^2}{mr_p} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(\frac{L^2(-1+\varepsilon)}{mP} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left(\frac{L^2(-1+\varepsilon)m|\alpha|}{mL^2} - \alpha\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = (|\alpha|(-1+\varepsilon)+|\alpha|)\frac{\vec{r}_p}{r_p} = |\alpha|\varepsilon\frac{\vec{r}_p}{r_p}$$