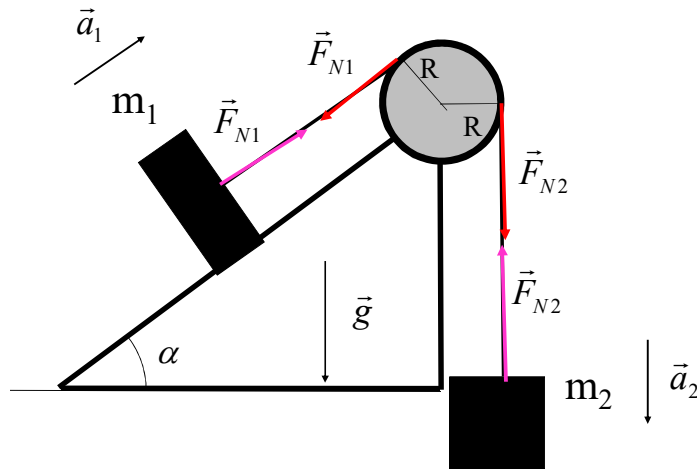


Zad. 6 (seria VII). Wiadomo iż klocek o masie m_2 (pokazany na rysunku obok) porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym **do dołu**. Klocek ten jest zawieszony na nieważkiej nici łączącej go z klockiem o masie $m_1 < m_2$ przesuwanym się po **szorstkiej** równi pochyłej o kącie nachylenia równi do podstawy α **do góry**. Nici łącząca oba klocki jest przełożona przez błocek w kształcie walca mogący się obracać wokół osi przechodzącej przez środek masy błočka, przy czym nica nie ślizga się po obwodzie błočka. Przyjmujemy, że błocek ma masę m , zaś jego promień (odległość osi obrotu od punktów leżących na brzegu błočka) jest równy R . Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g oraz współczynnik tarcia klocka o masie m_1 o równie pochyłą μ . **Znaleźć wartość przyspieszenia z jakim poruszają się oba klocki.**

Nici nierozciągliwa $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| \Rightarrow |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a = ?$

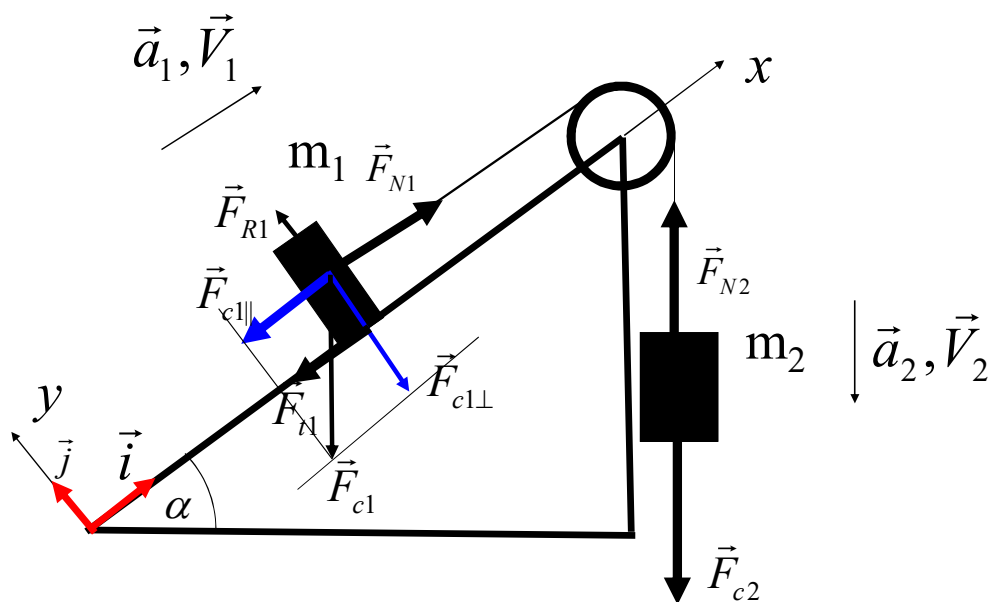


Błocek ruchomy

$$F_{N1} = |\vec{F}_{N1}| \neq F_{N2} = |\vec{F}_{N2}|$$

Dane $m, R, m_1, m_2, \alpha, \mu, g$

Szukane a



Siłę ciężkości można przedstawić jako

sumę dwóch sił $\vec{F}_{c1} = \vec{F}_{c1||} + \vec{F}_{c1\perp}$

Z II zasady dynamiki Newtona

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{w1} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{t1} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{c1||} + \vec{F}_{c1\perp} + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{t1}$$

Rozkład wektorów na składowe w układzie kartezjańskim z osią Ox skierowaną wzdłuż równi do góry i osią Oy prostopadłą do równi do góry

$$\vec{a}_1 = a \vec{i} \quad \text{gdzie} \quad a = |\vec{a}_1|$$

$$\Rightarrow a_{1x} = a \quad a_{1y} = 0$$

siła naciągu

$$\vec{F}_{c1\perp} = -F_{c1\perp} \vec{j} \quad \text{gdzie} \quad F_{c1\perp} = |\vec{F}_{c1\perp}|$$

$$\Rightarrow F_{c1\perp x} = 0 \quad F_{c1\perp y} = -F_{c1\perp}$$

$$\vec{F}_{N1} = F_{N1} \vec{i} \quad \text{gdzie} \quad F_{N1} = |\vec{F}_{N1}|$$

$$\Rightarrow F_{N1x} = F_{N1} \quad F_{N1y} = 0$$

nici

siła reakcji
podłoża

$$\vec{F}_{R1} = F_{R1} \vec{j} \quad \text{gdzie} \quad F_{R1} = |\vec{F}_{R1}|$$

$$\Rightarrow F_{R1x} = 0 \quad F_{R1y} = F_{R1}$$

$$\vec{F}_{c1||} = -F_{c1||} \vec{i} \quad \text{gdzie} \quad F_{c1||} = |\vec{F}_{c1||}|$$

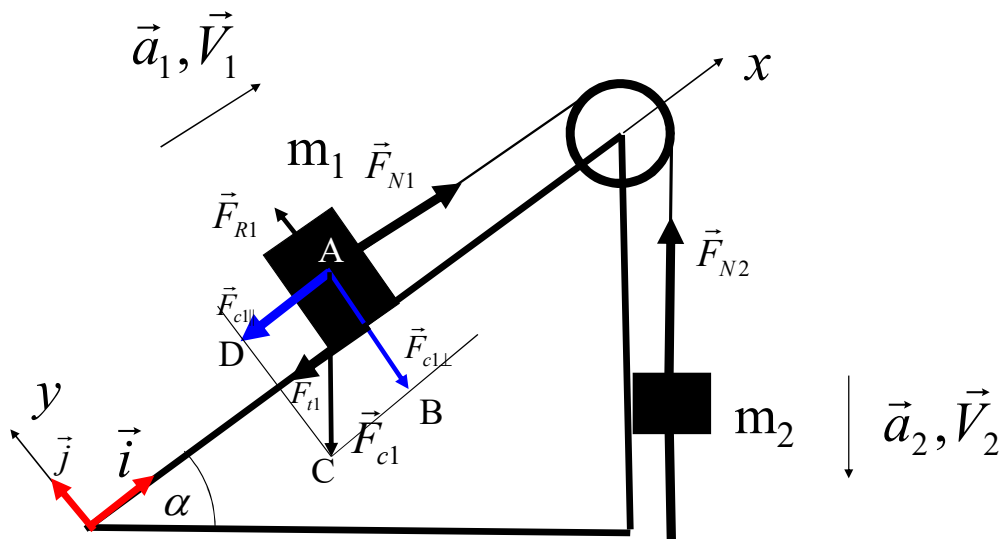
$$\Rightarrow F_{c1||x} = -F_{c1||} \quad F_{c1||y} = 0$$

siła
zsuwająca

$$\vec{F}_{t1} = -F_{t1} \vec{i} \quad \text{gdzie} \quad F_{t1} = |\vec{F}_{t1}|$$

$$\Rightarrow F_{t1x} = -F_{t1} \quad F_{t1y} = 0$$

siła
tarcia



$$\cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|\vec{F}_{c1\perp}|}{|\vec{F}_{c1}|} \Rightarrow$$

$$|\vec{F}_{c1\perp}| = |\vec{F}_{c1}| \cos(\alpha) = m_1 g \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|\vec{F}_{c1\parallel}|}{|\vec{F}_{c1}|} \Rightarrow$$

$$|\vec{F}_{c1\parallel}| = |\vec{F}_{c1}| \sin(\alpha) = m_1 g \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{c1\parallel} + \vec{F}_{c1\perp} + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{t1} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 a \vec{i} &= F_{N1} \vec{i} - F_{c1\parallel} \vec{i} - \vec{F}_{c1\perp} \vec{j} + F_{R1} \vec{j} - F_{t1} \vec{i} \Rightarrow \\ &\quad ma_{1x} = F_{w1x}, ma_{1y} = F_{w1y} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{N1} - F_{c1\parallel} - F_{t1} \\ 0 &= -F_{c1\perp} + F_{R1} \end{aligned} \quad (*)$$

$$m_1 a = F_{N1} - F_{c1\parallel} - F_{t1} \Leftrightarrow m_1 a_{1x} = F_{N1x} + F_{c1\parallel x} + F_{c1\perp x} + F_{R1x} + F_{t1x}$$

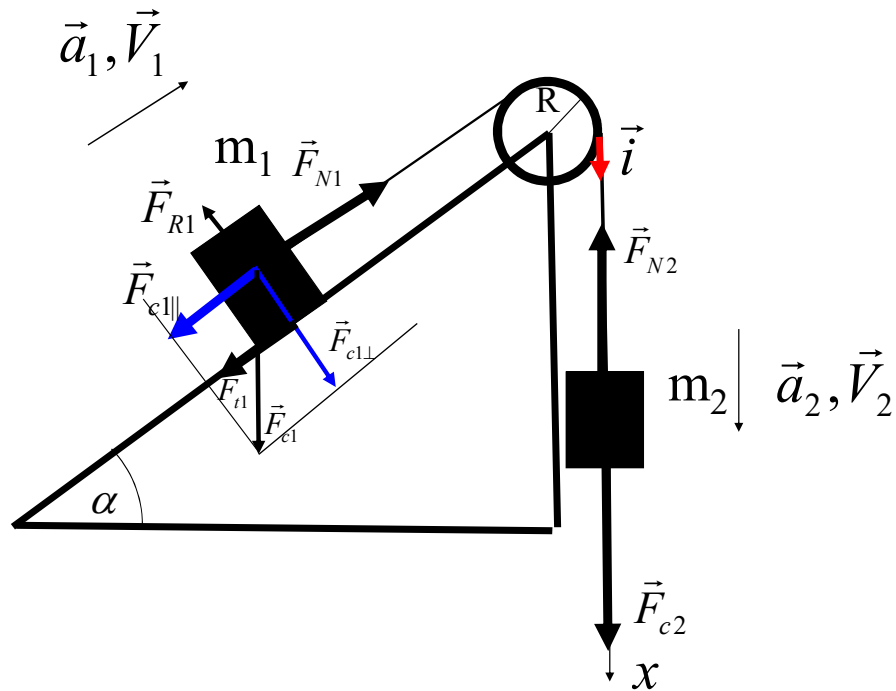
$$0 = -F_{c1\perp} + F_{R1} \Leftrightarrow m_1 a_{1y} = F_{N1y} + F_{c1\parallel y} + F_{c1\perp y} + F_{R1y} + F_{t1y}$$

Siła tarcia

$$F_{t1} = \mu F_{R1} = \mu F_{c1\perp}$$

Siła naciągu nici

$$F_{N1} = F_{c1\parallel} + F_{t1} + m_1 a$$



Przy analizie ruchu 2 ciała wprowadzamy nowy układ współrzędnych z osią Ox skierowaną pionowo do dołu

Z II zasady dynamiki Newtona

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{w2} = \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{N2}$$

$$\Rightarrow m_2 a \vec{i} = \vec{F}_{w2} = F_{c2} \vec{i} - F_{N2} \vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 a = F_{c2} - F_{N2}$$

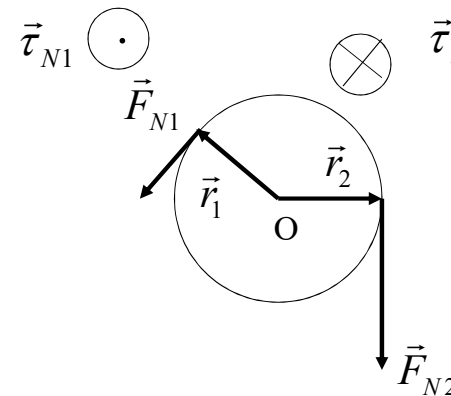
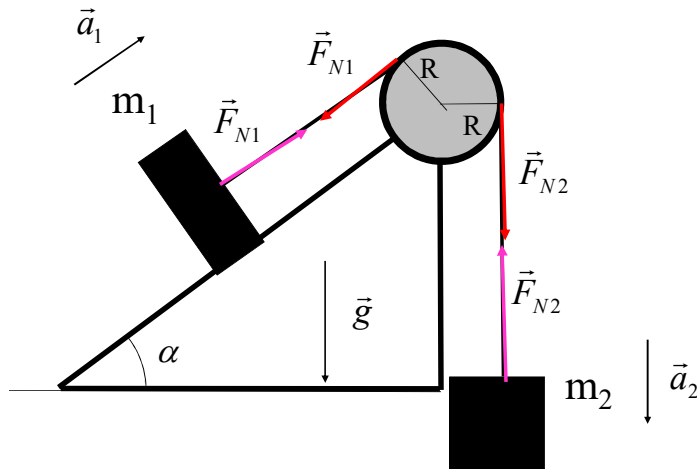
gdzie $F_{c2} = |\vec{F}_{c2}| = m_2 g$

$$F_{N2} = |\vec{F}_{N2}|$$

Wcześniej pokazano iż $F_{N1} = F_{c1||} + F_{t1} + m_1 a$

$$F_{N2} = F_{c2} - m_2 a$$

Analiza dynamiki ruchu obrotowego bloczka



Punkt O na osi obrotu
bloczka w płaszczyźnie nici

Moment siły naciągu nici $\vec{F}_{N1}$ określony względem punktu O $\vec{\tau}_{N1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{N1}$

jest skierowany w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Oz i ma wartość

$$|\vec{\tau}_{N1}| = |\vec{r}_1| |\vec{F}_{N1}| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = R F_{N1}$$

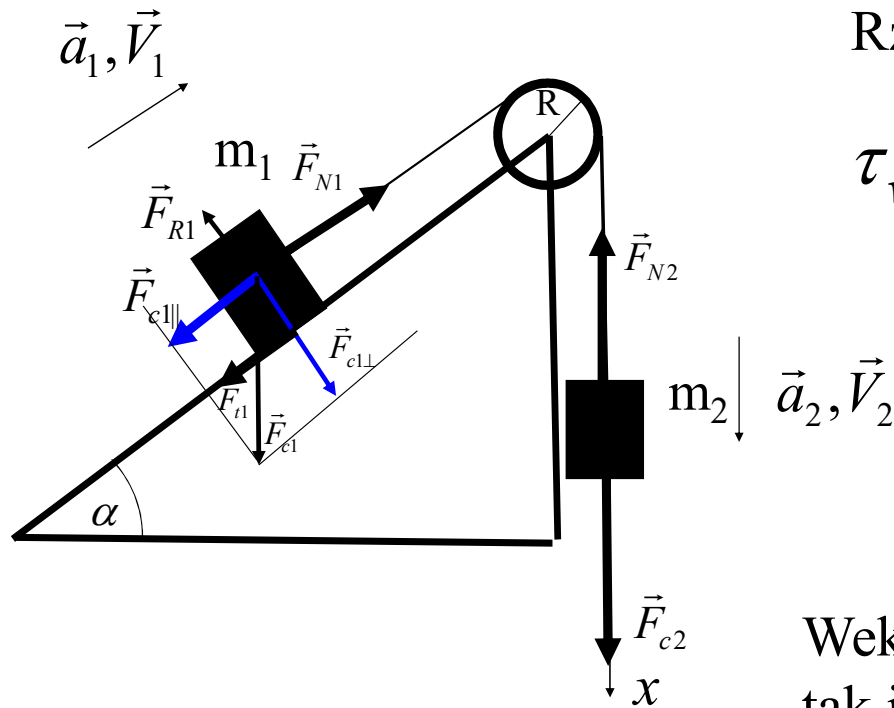
Moment siły naciągu nici $\vec{F}_{N2}$ określony względem punktu O $\vec{\tau}_{N2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{N2}$

jest skierowany w kierunku wyznaczonym przez zwrot osi Oz i ma wartość

$$|\vec{\tau}_{N2}| = |\vec{r}_2| |\vec{F}_{N2}| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = R F_{N2}$$

Wypadkowy moment siły $\vec{\tau}_w = \vec{\tau}_{N1} + \vec{\tau}_{N2}$ ma zwrot skierowany w kierunku

osi Oz i ma wartość $|\vec{\tau}_w| = |\vec{\tau}_{N2}| - |\vec{\tau}_{N1}| = R F_{N2} - R F_{N1}$



Rzut wypadkowego momentu siły na oś Oz

$$\tau_{wz} = |\vec{\tau}_w| = |\vec{\tau}_{N2}| - |\vec{\tau}_{N1}| = (F_{N2} - F_{N1})R$$

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$I\varepsilon = \tau_{wz} \Rightarrow I_0\varepsilon = (F_{N2} - F_{N1})R$$

Wektor przyspieszenia kąowego jest skierowany tak jak oś Oz czyli $\varepsilon = \varepsilon_z = |\vec{\varepsilon}|$

Powiązanie przyspieszenia kąowego z przyspieszeniem klocków

Uwzględniając fakt, iż szybkość dowolnego punktu na obwodzie krążka o promieniu R jest równa szybkości obu ciężarków a zatem i wartość przyspieszenia stycznego $\vec{a}_s$ dowolnego punktu znajdującego się na obwodzie bloczka jest równa wartości przyspieszenia obu ciężarków, można sformułować poniższą relację

$$\varepsilon = \frac{|\vec{a}_s|}{R} = \frac{a}{R}$$

Wyznaczenie wartości przyspieszenia klocków

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow F_{N1} = F_{c1\parallel} + F_{t1} + m_1 a$$

$$\Rightarrow F_{N2} = F_{c2} - m_2 a$$

$$I_0 \varepsilon = (F_{N2} - F_{N1})R \Rightarrow I_0 \frac{a}{R} = (F_{N2} - F_{N1})R \Rightarrow I_0 \frac{a}{R^2} = F_{N2} - F_{N1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_0 \frac{a}{R^2} = F_{c2} - m_2 a - F_{c1\parallel} - F_{t1} - m_1 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{I_0}{R^2} + m_1 + m_2 \right) a = F_{c2} - F_{c1\parallel} - F_{t1} \Rightarrow$$

$$F_{c1} = m_1 g \sin(\alpha)$$

$$F_{t1} = \mu m_1 g \cos(\alpha)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin(\alpha) - m_1 g \mu \cos(\alpha)}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1 (\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha))}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} g$$