

Zad. 6 (seria V). Wyznaczyć pracę wykonaną przez siłę działającą na ciało poruszające się po linii prostej wzdłuż osi Ox (w kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{i}$) od punktu o współrzędnej $x=x_p=1\text{m}$ do punktu o współrzędnej $x=x_k=3\text{m}$. Siłę tę opisuje wzór $\vec{F} = F_x \vec{i}$ przy czym zależność F_x od składowej x-owej wektora wodzącego ciała $\vec{r} = x\vec{i}$ opisuje wzór: $F_x(x) = B + Dx + Gx^2$ gdzie $B=3\text{N}$, $D=2\text{N/m}$, $G=6\text{N/m}^2$.

Ponieważ siła zmienia się w trakcie ruchu to wzór na pracę w postaci $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ można zastosować tylko dla nieskończenie małego odcinka drogi na której można uznać siłę za stałą. Prace wykonaną podczas pełnej drogi można policzyć jako sumę takich prac wykonanych na nieskończenie wielu odcinkach na które dzielimy pełną drogę. W rozważanym zadaniu ruch ciała odbywa się wzdłuż osi OX a więc wektor przemieszczenia ciała na każdym odcinku drogi ciała można przyjąć w postaci $\Delta\vec{r} = \Delta x \vec{i}$ (Δx - zmiana składowej x-owej wektora wodzącego ciała na tym odcinku drogi). Siła jest również skierowana równolegle do osi Ox i można ją przedstawić wzorem $\vec{F} = F_x \vec{i}$, przy czym składowa x-owa siły F_x jest funkcją współrzędnej x . A zatem praca wykonana na nieskończenie małym odcinku drogi na którym współrzędna x zmienia się o $\Delta x = dx$ jest równa $W = F_x dx$. Sumowanie elementarnych prac sprowadza się do obliczenia całki oznaczonej

$$W = \int_{x_p}^{x_k} F_x(x) dx = \int_{x_p}^{x_k} (B + Dx + Gx^2) dx = B \int_{x_p}^{x_k} 1 dx + D \int_{x_p}^{x_k} x dx + G \int_{x_p}^{x_k} x^2 dx$$

Uwzględniając to iż całka nieoznaczona $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$ gdy stała $k \neq -1$ gdzie C - stała, dowolna zaś $1=x^0$ możemy zapisać

$$W = Bx|_{x_p}^{x_k} + \frac{1}{2} Dx^2|_{x_p}^{x_k} + \frac{1}{3} Gx^3|_{x_p}^{x_k} = B(x_k - x_p) + \frac{1}{2} D(x_k^2 - x_p^2) + \frac{1}{3} G(x_k^3 - x_p^3)$$

czyli

$$W = 3\text{N}(3-1)\text{m} + \frac{1}{2} 2 \frac{\text{N}}{\text{m}} (9-1)\text{m}^2 + \frac{1}{3} 6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (27-1)\text{m}^3 = (6+8+52)\text{N} \cdot \text{m} = 66\text{J}$$