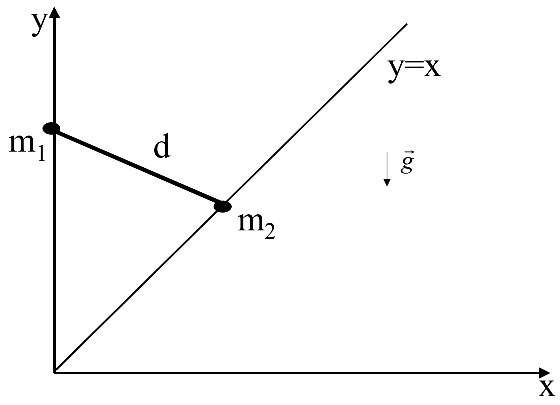
Zadanie 6. (seria II)
Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 znajdują się na płaszczyźnie o równaniu $z=0$ i są połączone sztywnym prętem o pomijalnie małej masie i długości d. Punkt o masie m_1 musi pozostać na prostej o równaniu $x=0$, zaś punkt o masie m_2 na prostej o równaniu $y=x$ (rysunek obok). Na punkty działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znaleźć położenie równowagi punktów wykorzystując zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a).



Zasada Lagrange'a (prac wirtualnych) dla układu złożonego z *n* punktów materialnych

Wynika z zasady d'Alemberta przy uwzględnieniu faktu iż w położeniu równowagi przyspieszenia wszystkich punktów materialnych są równe zeru

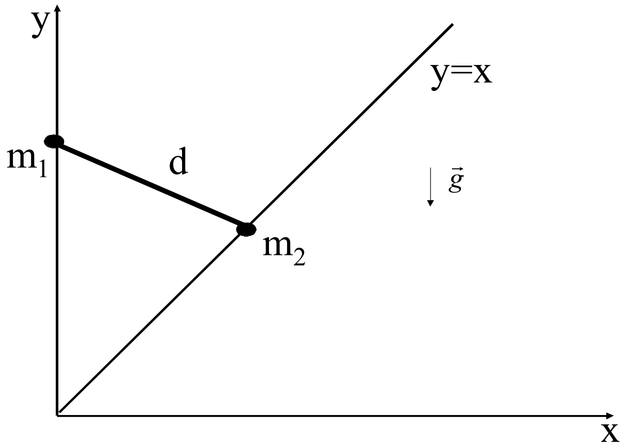
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} grad_i f_k \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$ k=1,....,p; p -liczba więzów

$$f_k(\vec{r}_1,........,\vec{r}_n) = 0$$ równanie k więzu k=1,....,p; p -liczba więzów

Jest warunkiem dostatecznym na wyznaczenie położenie równowagi gdy więzy i siły działające w układzie nie zależą jawnie od czasu

Analiza w przestrzeni dwuwymiarowej w dwuwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych



Równania więzów:

$$f_1 = x_1 = 0$$

$$f_2 = y_2 - x_2 = 0$$

$$f_3 = \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2 - d^2 = 0$$

Warunki na składowe wektorów przesunięć wirtualnych

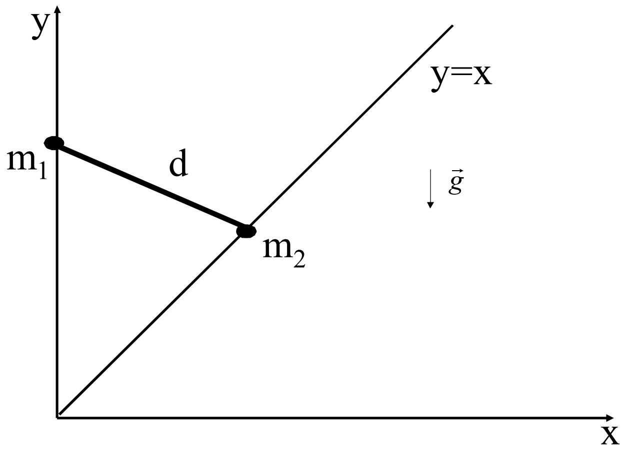
$$\sum_{i=1}^{n=2} grad_i f_k \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial f_k}{\partial y_2}\delta y_2 = 0$$

$\delta x_1 = 0$ k=1

$-\delta x_2 + \delta y_2 = 0$ k=2

$2\left(x_2 - x_1\right)\left(-\delta x_1 + \delta x_2\right) + 2\left(y_2 - y_1\right)\left(-\delta y_1 + \delta y_2\right) = 0$ k=3

.



Siła działająca na i-ty punkt materialny (i=1,2):

$$\vec{F}_i = [0, -m_i g] \Rightarrow F_{ix} = 0, F_{iy} = -m_i g$$

Równanie wyrażające zerowanie się sumy prac wszystkich sił na przesunięciach wirtualnych

$$\sum_{i=1}^{n=2} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Rightarrow F_{1x}\delta x_1 + F_{1y}\delta y_1 + F_{2x}\delta x_2 + F_{2y}\delta y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m_1 g \delta y_1 - m_2 g \delta y_2 = 0$$

Ponieważ mamy 3 równania więzów to tylko jedną składową wektorów przesunięć wirtualnych możemy uznać za wielkość dowolną.
Z warunków zadania wynika iż za składową taką można przyjąć np. δy_2

i spróbujemy pozostałe składowe wyznaczyć lub uzależnić od δy_2

W szczególności uzależnimy δy_1 od δy_2

$$\delta x_1 = 0$$

$$\delta y_2 - \delta x_2 = 0 \Rightarrow \delta x_2 = \delta y_2$$

$$2(x_2 - x_1)(-\delta x_1 + \delta x_2) + 2(y_2 - y_1)(-\delta y_1 + \delta y_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1)\delta y_2 + 2(y_2 - y_1)(-\delta y_1 + \delta y_2) = 0 \Rightarrow \delta y_1 = \frac{y_2 - y_1 + x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\delta y_2$$

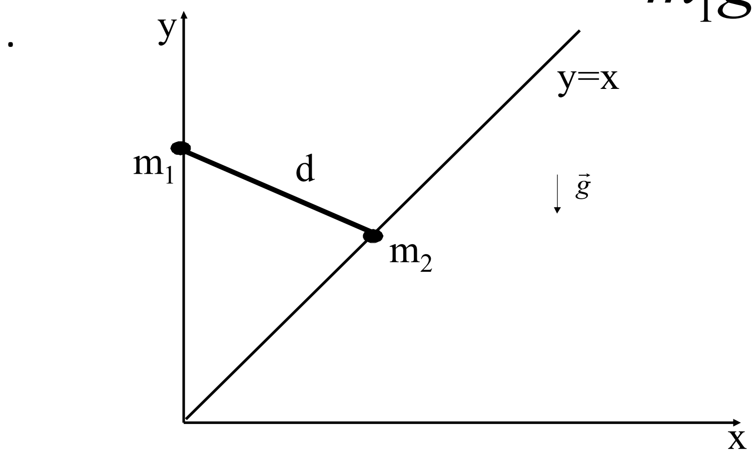
Zał. $y_2 \neq y_1$ (można niezależnie pokazać iż położeniu równowagi nie może odpowiadać punkt dla którego $y_2 = y_1$)

Uproszczenie otrzymanej relacji w oparciu o równania więzów

$$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1 + x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\delta y_2 \Rightarrow \delta y_1 = \frac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1}\delta y_2$$

$$f_1 = x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$f_2 = y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2$$



$$-m_1 g\delta y_1 - m_2 g\delta y_2 = 0 \qquad \delta y_1 = \frac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1}\delta y_2$$

$$\left(m_1\frac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1} + m_2\right)\delta y_2 = 0$$

δy_2 dowolne $\Rightarrow m_1\dfrac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1} + m_2 = 0$

$$m_1\frac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1} + m_2 = 0 \Rightarrow m_1(2y_2 - y_1) + m_2(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_2(2m_1 + m_2) - y_1(m_1 + m_2) = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}y_2$$

W położeniu równowagi relacja powyższa musi być spełniona obok równań więzów

$$f_3 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - d^2 = 0 \Rightarrow \qquad (y_2 - y_1)^2 + y_2^2 = d^2$$

$$f_1 = x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$f_2 = y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2$$

$$y_1 = \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} y_2 \qquad (y_2 - y_1)^2 + y_2^2 = d^2$$

$$\left(1 - \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 y_2^2 + y_2^2 = d^2 \Rightarrow \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 y_2^2 + y_2^2 = d^2 \Rightarrow \frac{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} y_2^2 = d^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_2 &= \pm \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}} d \\ y_1 &= \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} y_2 = \pm \frac{2m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}} d \\ x_2 &= y_2 = \pm \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}} d \\ x_1 &= 0 \end{aligned}}$$