

Zadanie 6 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej opisanej wzorem:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\vec{r} \text{ -wektor wodzący ciała, } \alpha \text{ -stała})$$

Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu równanie toru, po jakim porusza się to ciało. Wiadomo, iż całkowita energia ciała wynosi E i jest większa od zera, zaś moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych ma wartość $L \neq 0$. Założyć iż $\frac{\alpha m}{L^2} < 1$. Ponadto wiadomo iż odległość ciała od początku układu współrzędnych r osiąga wartość minimalną dla $\varphi = 0$.

Wsk. Wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$ i wzór na całkowitą energię

$$\text{ciała } E = T + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r).$$

Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $u = \frac{1}{r}$.

Zapis równania różniczkowego wynikającego ze wzoru Bineta $-\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=f(r)$

$$f(r)=-\frac{\alpha}{r^3} \Rightarrow -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=-\frac{\alpha}{r^3} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{m\alpha}{L^2r}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\left(1-\frac{m\alpha}{L^2}\right)\frac{1}{r}=0 \quad \kappa^2=1-\frac{m\alpha}{L^2}>0; u=\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2}+\kappa^2u=0$$

Rozwiązania równania poszukujemy w postaci $u=C\exp(\lambda\varphi)$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\kappa^2u=0 \Rightarrow \lambda^2C\exp(\lambda\varphi)+\kappa^2C\exp(\lambda\varphi)=0 \Rightarrow \lambda^2+\kappa^2=0 \text{ (równanie charakterystyczne)}$$

Pierwiastki równania $\lambda^2+\kappa^2=0 \quad \lambda_1=i\kappa \quad \lambda_2=-i\kappa$

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego

$$u=C_1\exp(\lambda_1\varphi)+C_2\exp(\lambda_2\varphi)=C_1\exp(i\kappa\varphi)+C_2\exp(-i\kappa\varphi)$$

C_1, C_2 stałe dowolne zespolone (dwie stałe bo równanie różniczkowe rzędu drugiego)

Poszukiwanie postaci rozwiązania bez wykorzystywania liczb zespolonych

$$\begin{aligned} u &= C_1 \exp(i\kappa\varphi) + C_2 \exp(-i\kappa\varphi) = C_1 [\cos(\kappa\varphi) + i \sin(\kappa\varphi)] + C_2 [\cos(\kappa\varphi) - i \sin(\kappa\varphi)] = \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\kappa\varphi) + i(C_1 - C_2) \sin(\kappa\varphi) = A \cos(\kappa\varphi) + B \sin(\kappa\varphi) \end{aligned}$$

gdzie $A=C_1+C_2, B=i(C_1-C_2)$ stałe dowolne będące liczbami rzeczywistymi, gdyż r rzeczywiste

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{A \cos(\kappa\varphi) + B \sin(\kappa\varphi)}$$

Jeżeli r osiąga minimum dla $\varphi=0$ to należy przyjąć iż $B=0$ czyli $r = \frac{1}{A \cos(\kappa\varphi)}$

$$\text{gdź} \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{A\kappa \sin(\kappa\varphi) - B\kappa \cos(\kappa\varphi)}{[A \cos(\kappa\varphi) + B \sin(\kappa\varphi)]^2} \quad \text{czyli} \quad \frac{dr}{d\varphi}(\varphi=0) = 0 \quad \text{gdź } B=0$$

Uzależnienie stałej A od energii całkowitej i wartości momentu pędu będących całkami ruchu

Określenie potencjału

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int f(r)dr = -\int -\frac{\alpha}{r^3}dr = -\frac{\alpha}{2r^2} + C$$

$$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \text{ Znajdzie } V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ gdź } C=0.$$

$$\text{Przyjmujemy} \quad V = -\frac{\alpha}{2r^2}$$

Uzależnienie energii całkowitej od A

$$E = T + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r) = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{du}{d\varphi} \right]^2 + u^2 \right] + V(r = \frac{1}{u})$$

$$u = A \cos(\kappa(\varphi - \varphi_0)), V = -\frac{\alpha}{2r^2} = -\frac{1}{2} \alpha u^2 \Rightarrow$$

$$E = \frac{L^2}{2m} \left\{ \left[-A\kappa \sin(\kappa\varphi) \right]^2 + \left[A \cos(\kappa\varphi) \right]^2 \right\} - \frac{\alpha}{2} \left[A \cos(\kappa\varphi) \right]^2 =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left\{ A^2 \left[\kappa^2 \sin^2(\kappa\varphi) + \cos^2(\kappa\varphi) \right] \right\} - \frac{\alpha}{2} \left[A \cos(\kappa\varphi) \right]^2 =$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left\{ A^2 \left[\left(1 - \frac{m\alpha}{L^2} \right) \sin^2(\kappa\varphi) + \cos^2(\kappa\varphi) \right] \right\} - \frac{\alpha A^2}{2} \cos^2(\kappa\varphi) =$$

$$E = \frac{L^2 A^2}{2m} \left[\sin^2(\kappa\varphi) + \cos^2(\kappa\varphi) \right] - \frac{A^2 \alpha}{2} \left[\sin^2(\kappa\varphi) + \cos^2(\kappa\varphi) \right] =$$

$$= \frac{L^2 A^2}{2m} - \frac{A^2 \alpha}{2} = \frac{L^2 A^2}{2m} \left(1 - \frac{m\alpha}{L^2} \right) = \frac{L^2 A^2 \kappa^2}{2m}$$

Energia będąca stałą ruchu nie zależy od zmiennej φ określającej położenie ciała na torze ruchu, dlatego można określić też E licząc ją w ustalonym punkcie na torze np. dla $\varphi=0$

$$E = \frac{L^2 A^2 \kappa^2}{2m} \Rightarrow A^2 = \frac{2mE}{L^2 \kappa^2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2mE}}{L\kappa} \Rightarrow r = \frac{1}{A \cos(\kappa\varphi)} = \frac{L\kappa}{\sqrt{2mE} \cos(\kappa\varphi)} \quad \kappa = \sqrt{1 - \frac{m\alpha}{L^2}}$$

Rozwiązanie to ma sens tylko gdy $E > 0$

Z relacji $E = T + V = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}$ gdzie potencjał efektywny $V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + V$

wynika iż w trakcie ruchu musi zachodzić $E - V_{ef}(r) \geq 0 \Leftrightarrow V_{ef}(r) \leq E$

Warunek powyższy jest spełniony w rozważanym przykładzie gdy

$$r \geq r_{\min} = \frac{1}{A} = \frac{L\kappa}{\sqrt{2mE}}$$

co można pokazać gdyż

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + V = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{2r^2} = \frac{L^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{\alpha m}{L^2} \right) = \frac{L^2 \kappa^2}{2mr^2} > 0 \Rightarrow V_{ef} \leq E \Leftrightarrow \frac{L^2 \kappa^2}{2mr^2} \leq E$$

Warunek ten gdy $\kappa^2 = 1 - \frac{m\alpha}{L^2} > 0$ może być spełniony tylko dla $E > 0$ i wynika z niego wówczas iż

$$r^2 \geq \frac{L^2 \kappa^2}{2mE} \Leftrightarrow r \geq r_{\min} = \frac{L\kappa}{\sqrt{2mE}}$$

W zasadzie wartość stałej A można by też określić ze wzoru $E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{ef} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2 \kappa^2}{2mr^2}$

określając wartość tej energii dla $\varphi = 0$ kiedy $r = \frac{1}{A}$ zaś $\dot{r} = 0$ (bo r osiąga wartość minimalną). Postępując w ten sposób otrzymujemy

$$E = \frac{L^2 \kappa^2 A^2}{2m} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2mE}}{L\kappa}$$

$$r = \frac{1}{A \cos(\kappa\varphi)} = \frac{L\kappa}{\sqrt{2mE} \cos(\kappa\varphi)} \quad \kappa = \sqrt{1 - \frac{m\alpha}{L^2}}$$

Odległość ciała od początku układu współrzędnych dąży do ∞ gdy

$$\cos(\kappa\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\varphi_{gr} = \pm \frac{\pi}{2\kappa}$$

W przypadku gdy siła jest odpychająca $\alpha < 0$ to $\kappa > 1$ i $\varphi_{gr} < \frac{\pi}{2}$

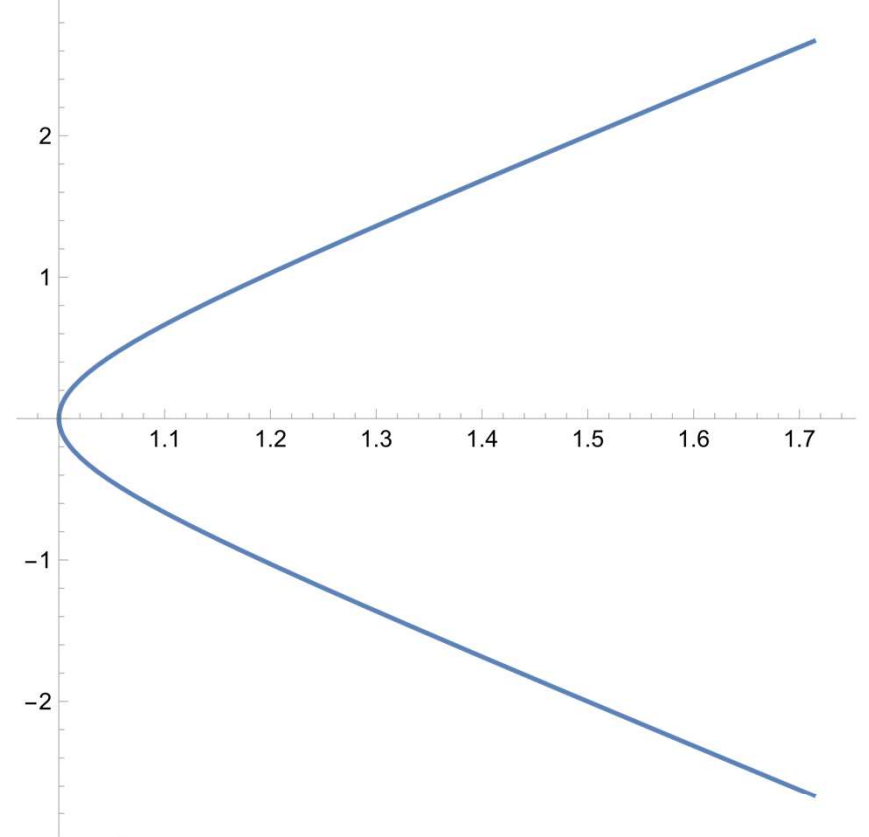
W przypadku gdy siła jest przyciągająca to $\alpha > 0$ to $\kappa < 1$ i $\varphi_{gr} > \frac{\pi}{2}$

W przypadku gdy $\kappa = 1/2$ to $\varphi_{gr} = \pi$

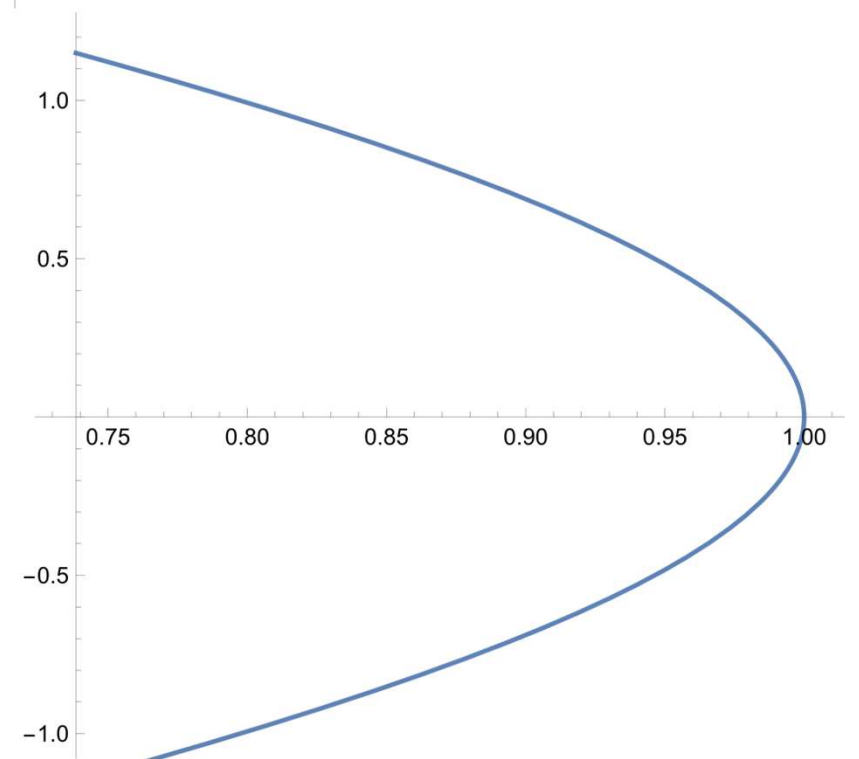
W przypadku gdy $\kappa = 1/4$ to $\varphi_{gr} = 2\pi$ czyli przed oddaleniem się do nieskończoności ciało okrąży początek układu współrzędnych

W przypadku gdy $\kappa \rightarrow 0$ to $\varphi_{gr} \rightarrow \infty$ czyli przed oddaleniem się do nieskończoności ciało okrąży początek układu współrzędnych nieskończenie wiele razy

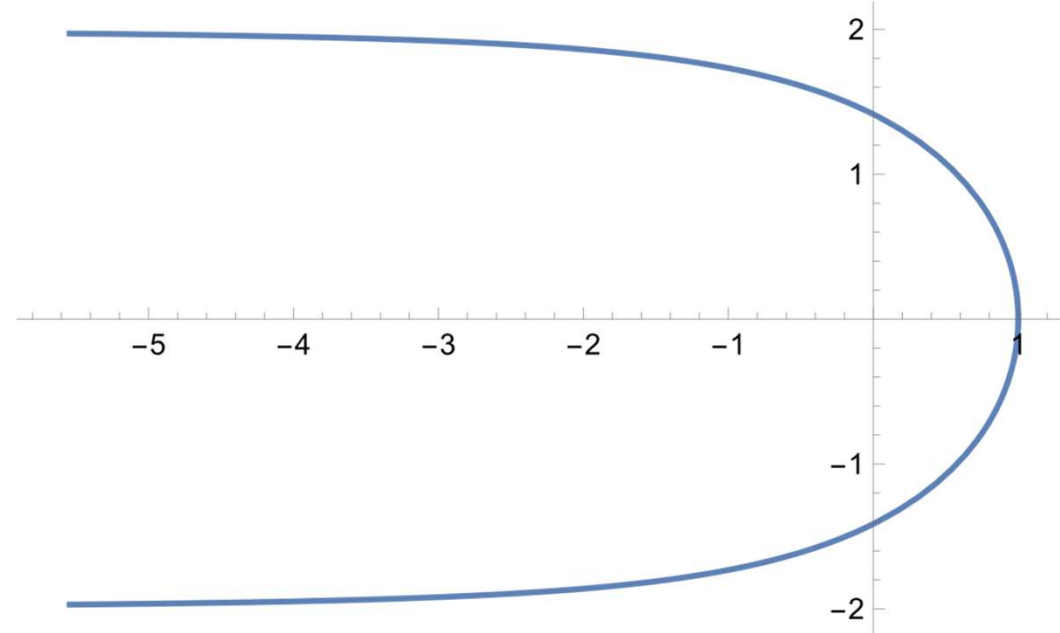
$\kappa=5/4$



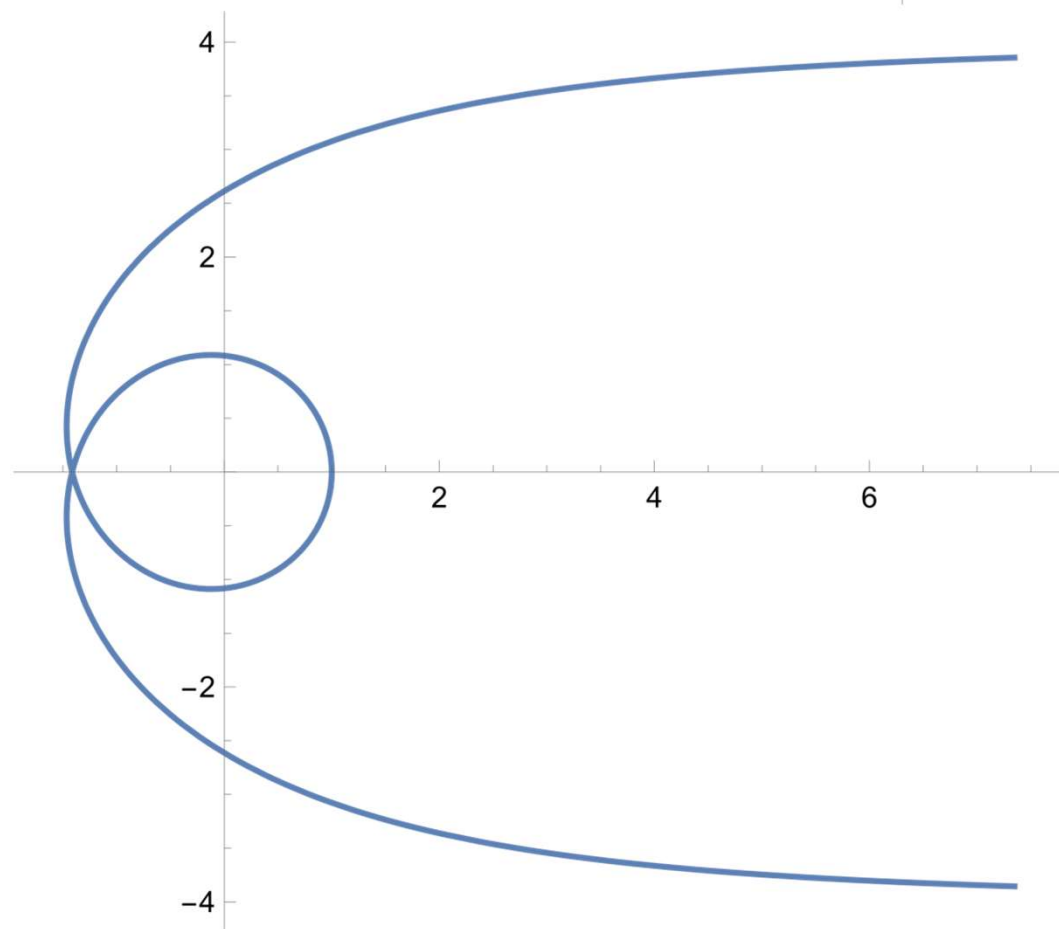
$\kappa=3/4$



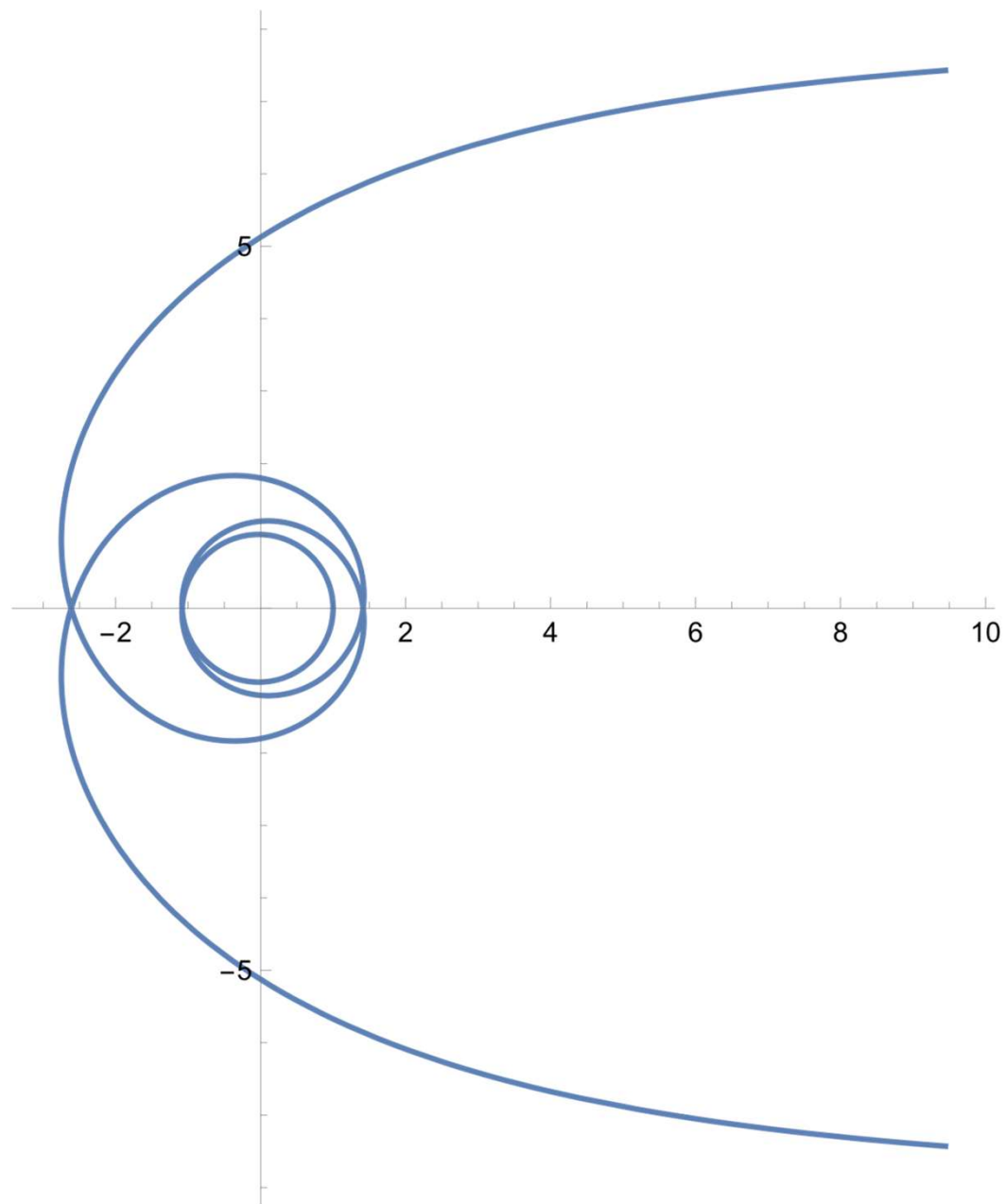
$\kappa=1/2$



$\kappa=1/4$



$\kappa=1/8$



W celu analizy zależności czasowych w ruchu ciała można wykorzystać równania

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2} \quad \kappa = \sqrt{1 - \frac{m\alpha}{L^2}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{m\alpha}{1 - \kappa^2}} \quad L_z = \pm L$$

oraz

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow ma_r = f(r) \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r) \Rightarrow m\left(\ddot{r} - r\frac{L_z^2}{m^2r^4}\right) = f(r) \Rightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right) = f(r)$$

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$$

lub ewentualnie $V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + V \quad V = -\int f(r)dr \quad E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{ef} \Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef}(r))}$

Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego rzędu drugiego $m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right) = f(r) \Leftrightarrow \ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{f(r)}{m}$

można wprowadzając nową zmienną $u = \dot{r}$ zamienić go na układ równań różniczkowych

rzędu 2 $u = \dot{r} \quad \dot{u} = \frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{f(r)}{m}$ przy czym $u(t=0) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef}(r(t=0)))}$

Gdy znane jest równanie toru to do wyznaczenia ruchu wystarczy rozwiązać jedno równanie z zaznaczonych, gdy nie jest ono znane trzeba rozwiązać dwa równania