

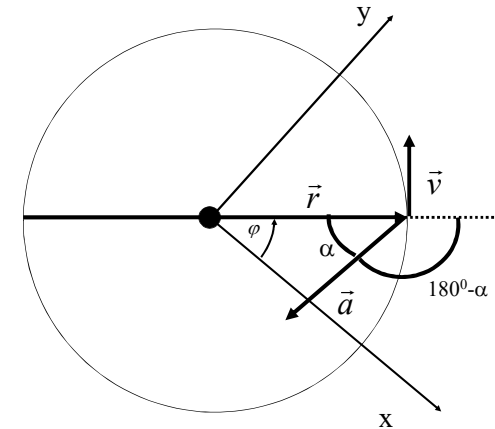


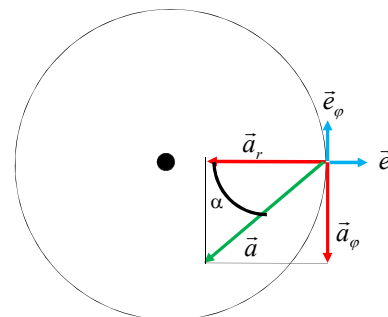
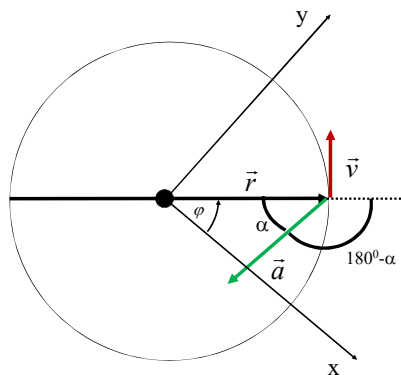
OMNIS2

Zadanie 5 (seria I). Znaleźć zależność od czasu $\varphi(t)$ czyli kąta jaki tworzy z osią Ox wektor wodzący punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r_0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeżeli kąt między promieniem wodzącym a wektorem przyspieszenia ma stałą wartość $\pi - \alpha$ przy czym $\alpha \in (0, \pi/2)$. Przyjąć, że $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $\dot{\varphi} = u$.

Odp. $\varphi(t) = \operatorname{ctg}(\alpha) \ln[\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1]$





Do rozwiązania zadania stosujemy układ biegunowy.

Wektor wodzący $\vec{r} = r\vec{e}_r$ przy czym $r = |\vec{r}|$.

Przyspieszenie $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\phi = a_r\vec{e}_r + a_\phi\vec{e}_\phi$

gdzie $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\phi})^2$, $a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}$.

$$r = r_0 = \text{const} \Rightarrow a_r = \ddot{r} - r(\dot{\phi})^2 = -r_0(\dot{\phi})^2, \quad a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = r_0\ddot{\phi}$$

Z treści zadania i załączonego rysunku

$$\text{const} = \tan(\alpha) = \frac{|\vec{a}_\phi|}{|\vec{a}_r|} = \frac{|a_\phi|}{|a_r|} = \frac{-a_\phi}{-a_r} = \frac{a_\phi}{a_r}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{r_0\ddot{\phi}}{-r_0(\dot{\phi})^2} = -\frac{\ddot{\phi}}{(\dot{\phi})^2}$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej $u = \dot{\phi}$

$$\tan(\alpha) = -\frac{\dot{u}}{u^2} \Rightarrow \dot{u} = -u^2 \tan(\alpha)$$

Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\frac{du}{u^2} = -\operatorname{tg}(\alpha) dt$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\operatorname{tg}(\alpha) \int dt$$

$$-\frac{1}{u} = -\operatorname{tg}(\alpha)t + C .$$

Stałą całkowania C wyznaczamy z warunku początkowego $\dot{\varphi}(t=0) = u(t=0) = \omega_0$

z którego wynika iż $C = -\frac{1}{\omega_0}$.

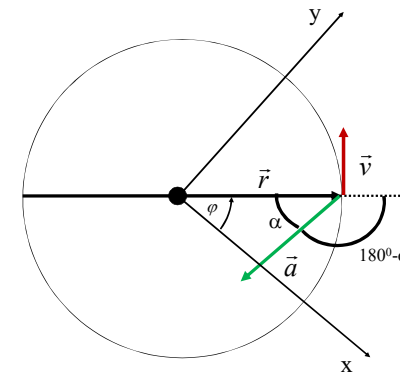
A zatem

$$\frac{1}{u} = \operatorname{tg}(\alpha)t + \frac{1}{\omega_0} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1}{\omega_0} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1}$$

$$\varphi = \int \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1} dt$$

$$\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \ln(|\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1|) + D$$



$$\alpha \neq 0$$

Stałą całkowania D wyznaczamy z warunku początkowego $\varphi(t=0)=0$ skąd wynika iż $D=0$.

$$\text{Ostatecznie } \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \ln(\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1). \quad \text{gdy } \alpha \neq 0 \quad \text{i} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ to ruch po okręgu nie możliwy (brak przyspieszenia dośrodkowego)- sprzeczność

Gdy $\alpha = 0$ to ruch po okręgu ze stałą prędkością kątową $\varphi = \omega_0 t$