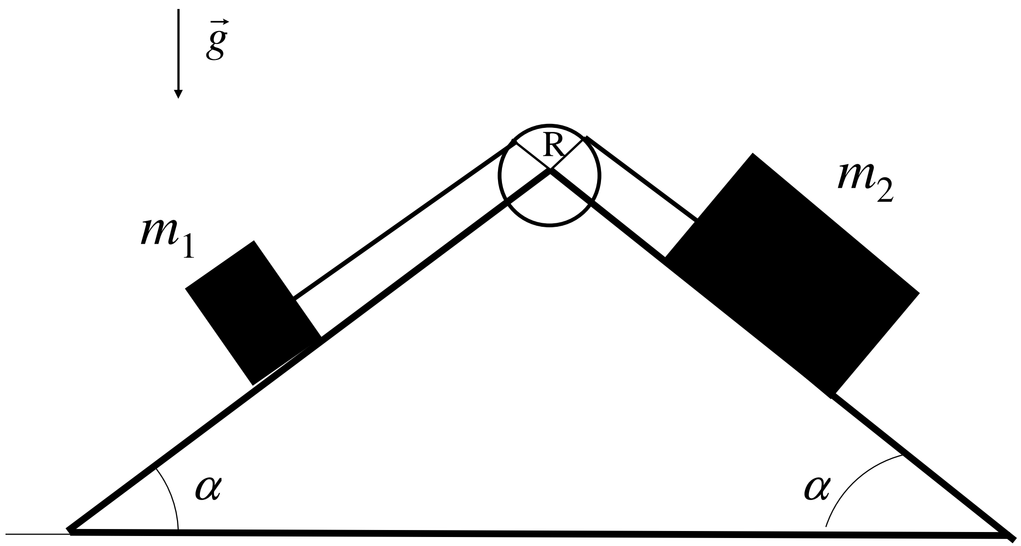
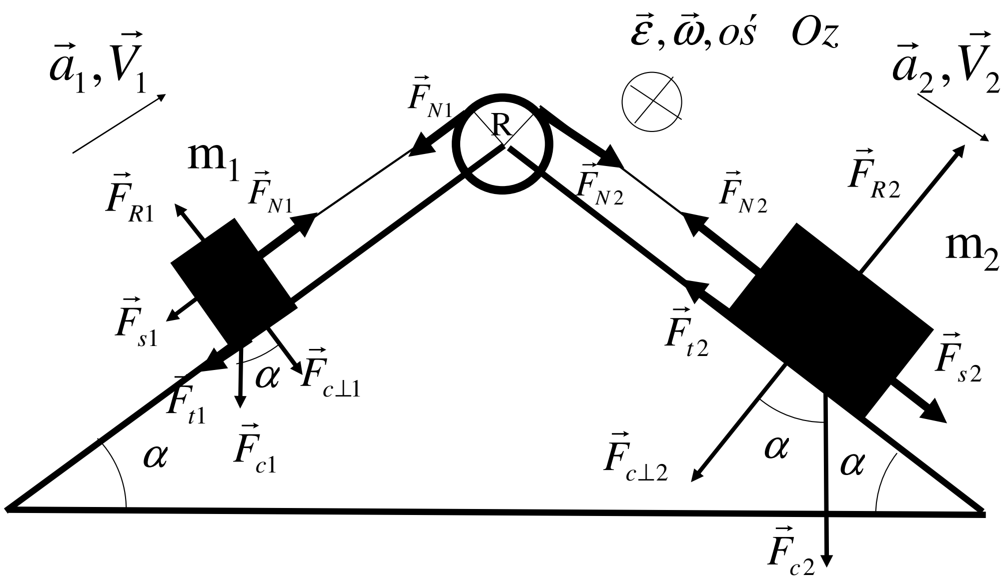
Zad 5 (seria IV). Rozważyć układ przedstawiony na rysunku. Znane są masy obu połączonych nicią klocków m_1 oraz m_2 ($m_2 > m_1$), kąt nachylenia obu równi do poziomu α oraz współczynnik tarcia μ obu klocków o równię. Ponadto wiadomo, iż moment bezwładności krążka, przez który przerzucono nić łączącą klocki względem jego osi obrotu jest równy I_0, zaś jego promień jest równy R.

Znaleźć wartość przyspieszenia, z jakim mogą poruszać się ruchem jednostajnie przyspieszonym oba klocki w przypadku, gdy krążek może się swobodnie obracać. Zakładamy iż nić nie ślizga się względem krążka. Wartość przyspieszenia ziemskiego jest równa g.



Dane $m_1, m_2, I_0, R, \alpha, \mu, g$

Szukane a



Nic nierozciągliwa

$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a$$

Bloczek ruchomy

$$\left|\vec{F}_{N1}\right| \neq \left|\vec{F}_{N2}\right| \qquad !!!!!!$$

Analiza dynamiki ruchu (postępowego) klocka o masie m_1

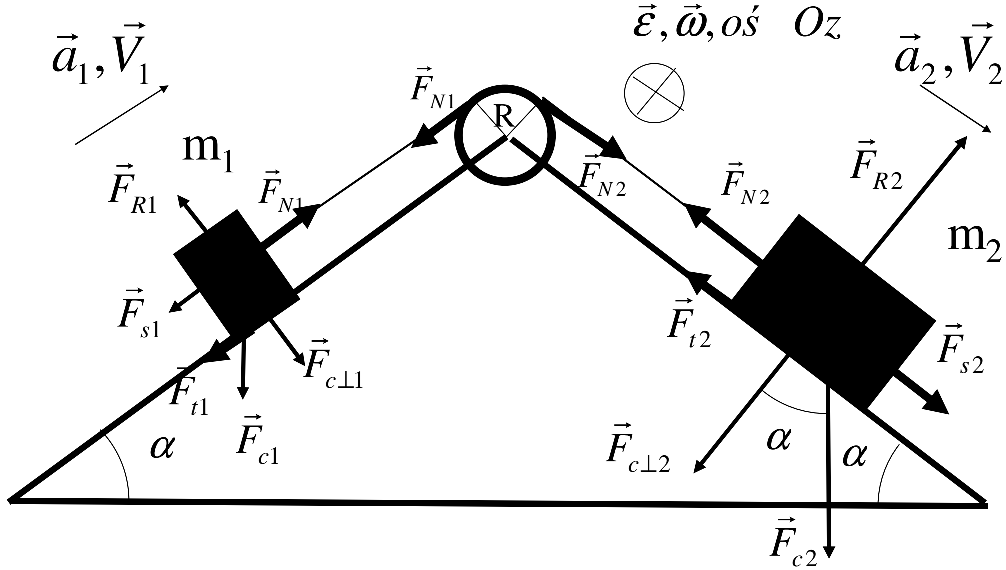
$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{t1} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{s1} + \vec{F}_{c\perp 1} + \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{t1} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{s1} + \vec{F}_{t1}$$

$$m_1\vec{a}_{1\perp} = \vec{F}_{w\perp 1} = \vec{F}_{c\perp 1} + \vec{F}_{R1} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{c\perp 1} = -\vec{F}_{R1}$$

$$\vec{F}_{c\perp 1} = -\vec{F}_{R1} \Rightarrow \left|\vec{F}_{R1}\right| = \left|\vec{F}_{c\perp 1}\right| = \left|\vec{F}_{c1}\right|\cos(\alpha) = m_1 g\cos(\alpha) \Rightarrow \left|\vec{F}_{t1}\right| = \mu\left|\vec{F}_{R1}\right| = \mu m_1 g\cos(\alpha)$$

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{s1} + \vec{F}_{t1} \Rightarrow \boxed{m_1 a = F_{N1} - F_{s1} - F_{t1}}$$

gdzie $\quad F_{s1} = \left|\vec{F}_{s1}\right| = \left|\vec{F}_{c1}\right|\sin(\alpha) = m_1 g\sin(\alpha) \qquad F_{t1} = \left|\vec{F}_{t1}\right| \qquad F_{N1} = \left|\vec{F}_{N1}\right| = ?$



Nic nierozciągliwa

$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a$$

Bloczek ruchomy

$$\left|\vec{F}_{N1}\right| \neq \left|\vec{F}_{N2}\right| \qquad !!!!!!$$

Analiza dynamiki ruchu (postępowego) klocka o masie m_2

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{R2} + \vec{F}_{t2} = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{s2} + \vec{F}_{c\perp 2} + \vec{F}_{R2} + \vec{F}_{t2} = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{s2} + \vec{F}_{t2}$$

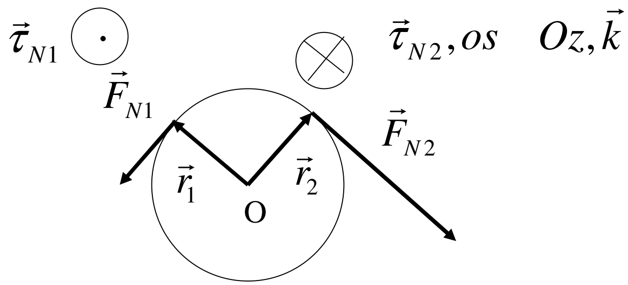
$$m_2\vec{a}_{2\perp} = \vec{F}_{w\perp 2} = \vec{F}_{c\perp 2} + \vec{F}_{R2} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{c\perp 2} = -\vec{F}_{R2}$$

$$\vec{F}_{c\perp 2} = -\vec{F}_{R2} \Rightarrow \left|\vec{F}_{R2}\right| = \left|\vec{F}_{c2\perp}\right| = \left|\vec{F}_{c2}\right|\cos(\alpha) = m_2 g\cos(\alpha) \Rightarrow \left|\vec{F}_{t2}\right| = \mu\left|\vec{F}_{R2}\right| = \mu m_2 g\cos(\alpha)$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{s2} + \vec{F}_{t2} \Rightarrow \boxed{m_2 a = -F_{N2} + F_{s2} - F_{t2}}$$

gdzie $F_{s2} = \left|\vec{F}_{s2}\right| = \left|\vec{F}_{c2}\right|\sin(\alpha) = m_2 g\sin(\alpha)$ $\quad F_{t2} = \left|\vec{F}_{t2}\right|$ $\quad F_{N2} = \left|\vec{F}_{N2}\right| = ?$

Analiza dynamiki ruchu obrotowego bloczka



Punkt O na osi obrotu bloczka w płaszczyźnie nici

$\vec{k}$ -wersor określający zwrot osi Oz (zgodny ze zwrotem wektorów prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego)

Moment siły naciągu nici $\vec{F}_{N1}$ określony względem punktu O

$$\vec{\tau}_{N1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{N1} = -\left|\vec{\tau}_{N1}\right|\vec{k}$$

jest skierowany w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Oz i ma wartość

$$\left|\vec{\tau}_{N1}\right| = \left|\vec{r}_1\right|\left|\vec{F}_{N1}\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = RF_{N1}$$

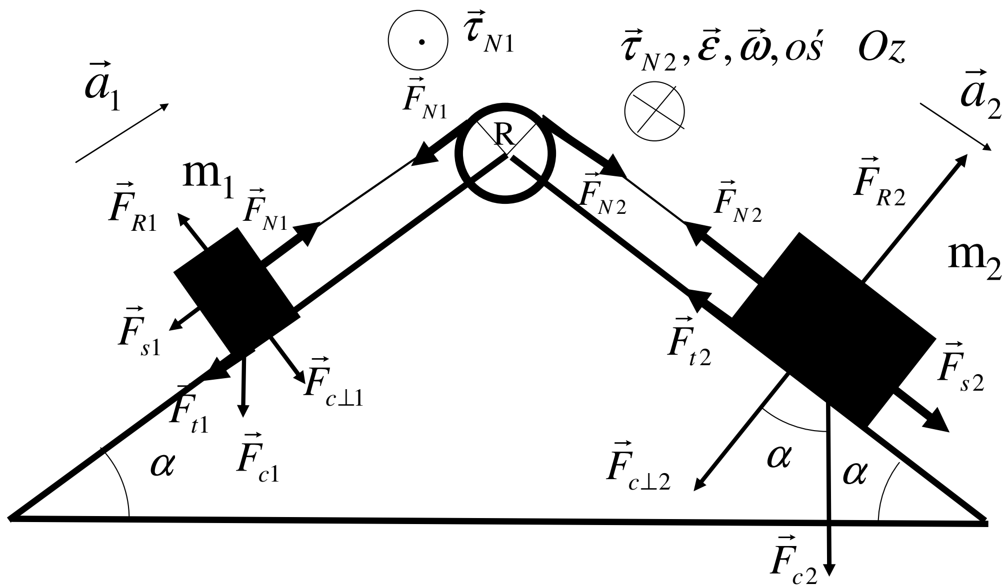
Moment siły naciągu nici $\vec{F}_{N2}$ określony względem punktu O

$$\vec{\tau}_{N2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{N2} = \left|\vec{\tau}_{N2}\right|\vec{k}$$

jest skierowany w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Oz i ma wartość

$$\left|\vec{\tau}_{N2}\right| = \left|\vec{r}_2\right|\left|\vec{F}_{N2}\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = RF_{N2}$$

Wypadkowy moment siły $\vec{\tau}_w = \vec{\tau}_{N1} + \vec{\tau}_{N1} = \left(\left|\vec{\tau}_{N2}\right| - \left|\vec{\tau}_{N1}\right|\right)\vec{k}$



$$\vec{\tau}_w = \vec{\tau}_{N1} + \vec{\tau}_{N1} = \left(\left|\vec{\tau}_{N2}\right| - \left|\vec{\tau}_{N1}\right|\right)\vec{k}$$

Rzut wypadkowego momentu siły na oś Oz

$$\tau_{wz} = \left|\vec{\tau}_{N2}\right| - \left|\vec{\tau}_{N1}\right| = \left(F_{N2} - F_{N1}\right)R$$

Wektor przyspieszenia kątowego

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} \Rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon = \left|\vec{\varepsilon}\right|$$

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$I\varepsilon_z = \tau_{wz} \Rightarrow \boxed{I_0\varepsilon = \left(F_{N2} - F_{N1}\right)R}$$

Powiązanie przyspieszenia kątowego z przyspieszeniem klocków

Uwzględniając fakt, iż szybkość dowolnego punktu na obwodzie krązka o promieniu *R* jest równa szybkości obu klocków a zatem i wartość przyspieszenia stycznego $\vec{a}_s$ dowolnego punktu znajdującego się na obwodzie bloczka jest równa wartości przyspieszenia obu klocków, można sformułować poniższą relację

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\left|\vec{a}_s\right|}{R} = \frac{a}{R}}$$

Wyznaczenie wartości przyspieszenia klocków

$$m_1 a = F_{N1} - F_{s1} - F_{t1} \Rightarrow F_{N1} = F_{s1} + F_{t1} + m_1 a$$

$$m_2 a = -F_{N2} + F_{s2} - F_{t2} \Rightarrow F_{N2} = F_{s2} - F_{t2} - m_2 a$$

$$I_0 \varepsilon = \left(F_{N2} - F_{N1}\right) R \Rightarrow I_0 \frac{a}{R} = \left(F_{N2} - F_{N1}\right) R \Rightarrow I_0 \frac{a}{R^2} = F_{N2} - F_{N1} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow I_0 \frac{a}{R^2} = F_{s2} - F_{t2} - m_2 a - F_{s1} - F_{t1} - m_1 a \Rightarrow$$

$$F_{si} = m_i g \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{I_0}{R^2} + m_1 + m_2\right) a = F_{s2} - F_{s1} - F_{t2} - F_{t1} \Rightarrow$$

i=1,2

$$F_{ti} = \mu m_i g \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{g \sin(\alpha)(m_2 - m_1) - g \cos(\alpha) \mu (m_2 + m_1)}{\frac{I_0}{R^2} + m_1 + m_2}}$$