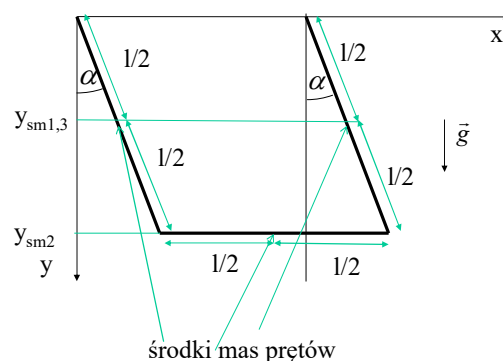


Zadanie 5. (seria 3) Dany jest układ trzech sztywnych prętów o długości l i masie m każdy, połączonych w sposób podany na rysunku. Układ znajduje się w polu siły ciężkości. Wyznaczyć równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu. Zakładamy iż w trakcie ruchu pręt łączący dwa pręty zachowuje położenie poziome (a więc porusza się tylko ruchem postępowym).



Badany układ ma 1 stopień swobody. Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć kąt α pokazany na rysunku, od którego wartości można uzależnić położenie dowolnego punktu prętów wchodzących w skład układu.

Ponieważ pręt poziomy wykonuje ruch postępowy to jego energia jest równa $T_2 = \frac{1}{2} m V^2$, gdzie V to szybkość z jaką porusza się dowolny punkt pręta np. jego środek masy.

Współrzędne określające położenie środka masy pręta można określić ze wzorów

$$x_{sm2} = l \sin(\alpha) + \frac{1}{2} l, \quad y_{sm2} = l \cos(\alpha)$$

skąd wynikają dalsze relacje dotyczące składowych prędkości środka masy tego pręta

$$\dot{x}_{sm2} = l \cos(\alpha) \dot{\alpha}, \quad \dot{y}_{sm2} = -l \sin(\alpha) \dot{\alpha}$$

i jego szybkości

$$V = \sqrt{\dot{x}_{sm2}^2 + \dot{y}_{sm2}^2} = l \dot{\alpha}$$

Energia kinetyczna rozważanego pręta jest więc równa

$$T_2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2$$

Energia kinetyczna pozostałych 2 prętów jest energią kinetyczną związaną z ich czysto obrotowym ruchem wokół prostych prostopadłych do płaszczyzny rysunku przechodzących przez punkty leżące na początku tych prętów na osi Ox. Ruch ten zachodzi z prędkością kątową równą co do wartości $\omega = \dot{\alpha}$.

Momenty bezwładności obu prętów wokół osi obrotu można określić ze wzoru Steinera

$$I = I_0 + m d^2$$

w którym $I_0 = \frac{1}{12}ml^2$ to moment bezładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku przechodzącej przez środek masy pręta, zaś $d = \frac{l}{2}$ to odległość między środkiem masy pręta (leżącym w środku pręta) a jego początkiem

$$\text{A zatem } I = I_0 + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Energia kinetyczna każdego z prętów wykonujących ruch obrotowy jest równa

$$T_1 = T_3 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2$$

Energia kinetyczna całego układu jest równa

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{5}{6}ml^2\dot{\alpha}^2$$

Energia potencjalna każdego pręta z dokładnością do wspólnej stałej jest równa

$$V_i = -mgy_{smi}$$

gdzie y_{smi} to współrzędna y-owa środka masy danego pręta.

Współrzędne te są równe

$$y_{sm2} = l \cos(\alpha), y_{sm1} = y_{sm3} = \frac{l}{2} \cos(\alpha)$$

A zatem energia potencjalna układu jest równa

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{1}{2}mgl \cos(\alpha) - mgl \cos(\alpha) - \frac{1}{2}mgl \cos(\alpha) = -2mgl \cos(\alpha)$$

Funkcja Lagrange'a zależna wyłącznie od współrzędnej uogólnionej α i prędkości uogólnionej $\dot{\alpha}$ jest równa

$$L = T - V = \frac{5}{6}ml^2\dot{\alpha}^2 + 2mgl \cos(\alpha)$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{5}{3}ml^2\dot{\alpha} \right) = \frac{5}{3}ml^2\ddot{\alpha}$$

zaś

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -2mgl \sin(\alpha)$$

to równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{5}{3} m l^2 \ddot{\alpha} + 2 m g l \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{6}{5} \frac{g}{l} \sin(\alpha) = 0$$

Ma ono taką samą postać jak równanie ruchu dla wahadła matematycznego o długości równej $\frac{5}{6}l$.