

Zadanie 5 (seria I). Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

po torze danym w układzie biegunowym wzorem: $r(\varphi) = \frac{b}{\varphi}$ (gdzie b -znana stała dodatnia).

Wiadomo iż dla $t = 0$ $r(t = 0) = r_0$ oraz wartość prędkości $v(t = 0) = v_0$. Wiadomo ponadto iż nieznana co do wartości $\dot{\varphi}(t = 0)$ jest dodatnia.

1) Wykazać, że wartość wypadkowej siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych)

2) Określić wartość momentu pędu ciała współrzędnych.

3) Określić całkowitą energię ciała $E = T + V$ przy założeniu iż wartość energii potencjalnej V w nieskończonej odległości od centrum siły jest równa 0.

4) Znaleźć zależność $\varphi = \varphi(t)$ oraz $r = r(t)$. Po jakim czasie ciało spadnie na centrum siły?
Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Przy określeniu siły

wykorzystać wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$

Moment pędu można określić wykorzystując wzory określające energię kinetyczną ciała:

$$T = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] \quad (\text{do udowodnienia}) \quad \text{oraz} \quad T = \frac{mv^2}{2} \quad \text{a także warunki początkowe}$$

ruchu.

Równanie toru

$$r = \frac{b}{\varphi}$$

Można pokazać iż $\lim_{\varphi \rightarrow 0} r(\varphi) = \infty, \lim_{\varphi \rightarrow \infty} r(\varphi) = 0$

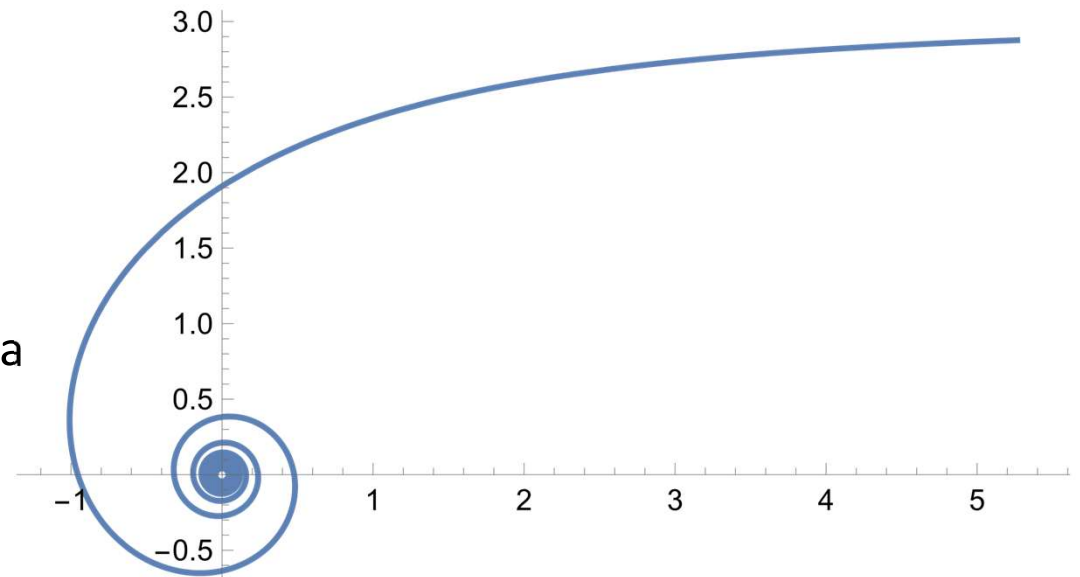
Torem opisywanym jest spirala hiperboliczna

Przy tym w chwili początkowej ruchu

$$r(t=0) = r_0 \Rightarrow \varphi(t=0) = \frac{b}{r_0}$$

Ponieważ $\dot{\varphi}(t=0) > 0$ to (przynajmniej) na początku ruchu kąt φ rośnie z czasem czyli odległość ciała od początku układu współrzędnych (centrum siły) maleje

Relacja ta zachodzi podczas całego ruchu (co wynika z tego iż momentu pędu jest stałą ruchu) i zostanie pokazane później



Określenie zależności siły centralnej $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ od r

Wykorzystamy wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$

$$f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\varphi}{b} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{L^2}{mr^2} \left[0 + \frac{1}{r} \right] = -\frac{L^2}{mr^3}$$

Widać iż $f(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$ gdzie $\alpha = \frac{L^2}{m} = \text{const}$

Widać iż siła jest odwrotnie proporcjonalna do 3 potęgi odległości od centrum siły, przy czym ujemny znak $f(r)$ wskazuje na to iż siła ta jest skierowana w kierunku centrum siły

Uzależnienie energii kinetycznej od L i równania toru

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\phi^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} = \frac{L_z^2}{2m} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2m} \left\{ \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\}$$

$$L_z = mr^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$L = |\vec{L}| = |L_z|$$

Uzależnienie szybkości od r(φ)

$$T = \frac{m}{2} |\vec{v}|^2 = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{L^2}{m^2} \left[\left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right]} = \sqrt{\frac{L^2}{m^2} \left[\left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\phi}{b} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right]} = \frac{L}{m} \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}} = \frac{L}{mb} \sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2}}$$

$$r = \frac{b}{\phi}$$

Uzależnienie momentu pędu od $v_0 = v(t=0)$

$$r(t=0) = r_0 \Rightarrow v_0 = \frac{L}{mb} \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}} \Rightarrow L = \frac{mbv_0}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}$$

Wyznaczenie energii potencjalnej

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int f(r)dr = -\int -\frac{\alpha}{r^3}dr = -\frac{\alpha}{2r^2} + C = -\frac{L^2}{2mr^2} + C$$

$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Znajdzie $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ gdy $C=0$. Przyjmujemy $V = -\frac{L^2}{2mr^2}$

Wyznaczenie energii całkowitej

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{L^2}{2m} \left\{ \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} - \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2m} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 = \frac{L^2}{2m} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varphi}{b} \right) \right]^2 = \frac{L^2}{2mb^2} = \\ &= \frac{m^2 b^2 v_0^2}{2mb^2 \left(1 + \frac{b^2}{r_0^2} \right)} = \frac{mv_0^2}{2 \left(1 + \frac{b^2}{r_0^2} \right)} > 0 \end{aligned}$$

Z relacji $E = T + V = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}$ gdzie potencjał efektywny $V_{ef} = V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V$

wynika iż w trakcie ruchu musi zachodzić $E - V_{ef}(r) \geq 0$

Warunek powyższy jest spełniony w rozważanym przykładzie gdyż

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + V = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2}{2mr^2} = 0 = const$$

i nie wynika z niego ograniczenie na wartości r , które zmieniać się mogą w zakresie $\langle 0, \infty \rangle$
co dla rozpatrywanej krzywej w ogólności przy odpowiednim wyborze warunków początkowych
ma miejsce (przy przyjętych warunkach początkowych r zmienia się w zakresie $\langle 0, r_0 \rangle$)

Wyznaczenie zależności $\varphi(t)$

Do określenia zależności można wykorzystać relacje:

$$L_z = mr^2 \dot{\varphi}$$

(L_z składowa z-owa momentu pędu, oś Oz prostopadła do płaszczyzny w której odbywa się

ruch, $L = |\vec{L}| = |L_z|$) Ponieważ $\dot{\varphi}(t=0) > 0$ to $L_z = mr^2 \dot{\varphi} = L_z(t=0) = mr_0^2 \dot{\varphi}(t=0) > 0 \Rightarrow L_z > 0 \Rightarrow L_z = L$

$$L_z = \frac{mbv_0}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} \quad \text{Wynika z tego też iż podczas całego ruchu } \dot{\varphi} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{mbv_0}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} = m \frac{b^2}{\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{v_0}{b \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} dt = \frac{1}{\varphi^2} d\varphi$$
$$L_z = mr^2 \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0}{b \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} \int dt = \int \frac{1}{\varphi^2} d\varphi \Rightarrow \frac{v_0 t}{b \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} = -\frac{1}{\varphi} + C$$

Wyznaczenie stałej C z warunków początkowych ruchu

$$r(t=0) = r_0 = \frac{b}{\varphi(t=0)} \Rightarrow \varphi(t=0) = \frac{b}{r_0}$$

$$\frac{v_0 t}{b \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} = -\frac{1}{\varphi} + C \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\varphi(t=0)} + C \Rightarrow C = \frac{1}{\varphi(t=0)} = \frac{r_0}{b}$$

$$\frac{v_0 t}{b \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{r_0^2}\right)}} = -\frac{1}{\varphi} + \frac{r_0}{b} \Rightarrow \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{b} \left[r_0 - \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} \right] \Rightarrow \varphi = \frac{b}{r_0 - \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}}$$

Wyznaczenie zależności $r(t)$ i czasu po którym ciało spadnie na centrum siły

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{b} \left[r_0 - \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} \right] \Rightarrow r = \frac{b}{\varphi} = r_0 - \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}$$

$$\Rightarrow r(t_s) = 0 \Rightarrow r_0 - \frac{v_0 t_s}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} = 0 \Rightarrow t_s = \frac{r_0}{v_0} \sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}$$

Wyznaczenie zależności $r(t)$ oraz $\varphi(t)$ – inny sposób

$$E = T + V = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 \Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2\left(1 + \frac{b^2}{r_0^2}\right)} \Rightarrow \dot{r} = \pm \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} \Rightarrow r = \pm \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} + C$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} r(t=0) = C \\ r(t=0) = r_0 \end{matrix} \Rightarrow C = r_0$$

$$\Rightarrow r = r_0 \pm \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}} \quad r = \frac{b}{\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{r_0 \pm \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{b}{r^2} \dot{r} = -\frac{b}{r^2} \frac{\pm v_0}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0 \Rightarrow r = r_0 - \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}, \varphi = \frac{b}{r_0 - \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r_0^2}}}}$$