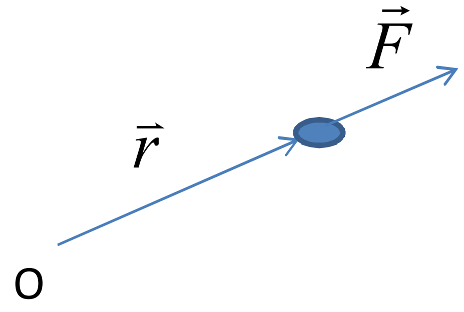
Zadanie 5 (seria I)

Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej danej wzorem $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$.

gdzie $r = |\vec{r}|$.

Siła ta działa w kierunku centrum siły gdy $f(r) < 0$, podczas gdy dla $f(r) > 0$ zwrot tej siły jest przeciwny.



rysunek dla f(r) >0

a) Pokazać iż, że moment pędu ciała określony względem początku układu współrzędnych $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ jest stały w trakcie ruchu ciała.

Liczymy $\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} f(r) = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Równanie ruchu $\quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$

$\vec{L} = const \Rightarrow$ Ruch płaski zachodzący w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{L}$

Do opisu ruchu można wykorzystać układ biegunowy wprowadzony w tej płaszczyźnie b1) Pokazać, że w trakcie ruchu ciała nie ulega zmianie wartość energii danej wzorem

$$E=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{2}+V(r)$$

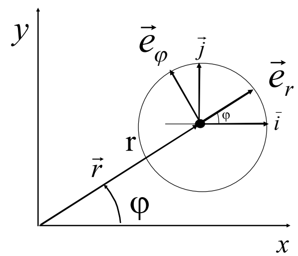
gdzie *V(r)* oznacza potencjał (energie potencjalną) spełniający relację $f(r)=-\dfrac{\partial V(r)}{\partial r}$.

Dygresja : ogólnie $\vec{F}=-gradV=-\nabla V(\vec{r})$

W układzie biegunowym $\vec{r}=r\vec{e}_r$ $\quad x=r\cos(\varphi)$ $\quad y=r\sin(\varphi)$

Operator gradientu $\nabla h(\vec{r})=\dfrac{\partial h}{\partial r}\vec{e}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$ czyli $\vec{F}=-\nabla V(\vec{r})=-\dfrac{\partial V(r,\varphi)}{\partial r}\vec{e}_r-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V(r,\varphi)}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$

Dla siły centralnej $\vec{F}=f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}=f(r)\vec{e}_r$



czyli $\quad f(r)=-\dfrac{\partial V}{\partial r}$ $\quad \dfrac{\partial V}{\partial\varphi}=0\Rightarrow V=V(r)=-\int f(r)dr$

Ponadto wektor prędkości $\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, wektor momentu pędu $\vec{L}=mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$

Dowód iż energia jest stałą ruchu Liczymy $\dfrac{dE}{dt}$ $\quad \dfrac{dE}{dt}=\dfrac{1}{2}m\dfrac{d\left(\dot{\vec{r}}^{2}\right)}{d\dot{\vec{r}}}\cdot\ddot{\vec{r}}+\dfrac{\partial V(r)}{\partial r}\dot{r}$

$$\frac{dE}{dt}=m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}-f(r)\dot{r}=f(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\dot{\vec{r}}-f(r)\dot{r}=f(r)\vec{e}_r\cdot\vec{v}-f(r)\dot{r}=f(r)\dot{r}-f(r)\dot{r}=0\quad\Rightarrow E=const$$

$m\ddot{\vec{r}}=f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$ $\qquad\qquad$ $\vec{e}_r\cdot\vec{v}=v_r=\dot{r}$

b2) Pokazać, iż energie ciała $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r)$ można wyrazić wzorem

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Wykorzystać trzeba relacje

prędkość $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, wektor momentu pędu $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\vec{r}}^{\,2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L_z}{mr^2}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2}$$

$$L_z^2 = L^2$$

Pokazać, iż energie ciała $E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r)$ można wyrazić wzorem

$$E = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right] + V(r)$$

Pokazano wcześniej iż $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$

Traktujemy *r* jako jawną funkcje tylko kąta φ

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{L_z}{mr^2} = -\frac{L_z}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \qquad \frac{dr}{d\varphi} = -r^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m}{2}\frac{L_z^2}{m^2}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2m}\left[\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right] + V(r)$$

b3) Pokazać iż spełnione jest równanie (wzór Bineta): $-\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=f(r)$

W układzie biegunowym wektor przyspieszenia można zapisać w postaci:

$\ddot{\vec{r}}=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$ gdzie $\vec{e}_r=\frac{\vec{r}}{r}$

Z II zasady dynamiki $m\ddot{\vec{r}}=f(r)\frac{\vec{r}}{r}\Rightarrow \begin{array}{l} m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=f(r) \\ m\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)=0 \end{array}$

Wykorzystujemy relacje $m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=f(r)$, $\quad \dot{r}=-\frac{L_z}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$, $\quad \dot{\varphi}=\frac{L_z}{mr^2}$, $\quad L^2=L_z^2$

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{L_z}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{L_z}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\dot{\varphi}=$$

$$=\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{L_z}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\frac{L_z}{mr^2}=-\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)=m\left(-\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)-r\frac{L^2}{m^2r^4}\right)=-\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=f(r)$$