Zad. 4 (seria V). Ciało o masie m=0,01kg wykonuje drganie harmoniczne opisywane zależnością:

$x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ (x wyrażone jest w metrach, t w sekundach).

1) Określić okres drgań harmonicznych.
2) W chwili, gdy wychylenie ciała od położenia równowagi wynosi x=-1m, obliczyć przyspieszenie ciała oraz jego energię kinetyczną i potencjalną.
3) Ile wynoszą maksymalne wartości:
   a) prędkości ciała b) przyspieszenia ciała
   c) wypadkowej siły działającej na to ciało?

   Dla jakich chwil czasu t powyższe wielkości przyjmują wartości maksymalne?

Równanie drgań harmonicznych nietłumionych zachodzących w kierunku wyznaczonym przez zwrot osi OX można opisać wzorem: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Zgodnie z treścią zadania $x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

Z porównania obu wzorów $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

Amplituda: A=2 m Częstość kołowa drgań $\omega = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s}$

A zatem okres drgań $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 4s}$

Zależność od czasu prędkości $V_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$

Zależność od czasu przyspieszenia $a_x = \frac{dV_x}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$

Siła działająca na ciało $F_x = ma_x = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$

Określenie informacji o fazie drgań $\omega t + \varphi_0$ w chwili $t=t_s$ gdy x=-1m

$$x(t = t_s) = 2\cos(\omega t_s + \varphi_0) = -1 \Rightarrow \cos(\omega t_s + \varphi_0) = -\frac{1}{2}$$

Określenie przyspieszenia ciała w chwili $t=t_s$

$$\boxed{a_x(t = t_s) = \frac{dV_x}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t_s + \varphi_0) = -2m \cdot \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{s^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}\frac{m}{s^2}}$$

Określenie energii potencjalnej ciała w chwili $t=t_s$

$$\boxed{E_p(t = t_s) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t = t_s) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01kg \cdot \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{s^2} \cdot (-1)^2 m^2 = \frac{0{,}01\pi^2}{8} J}$$

Określenie energii kinetycznej ciała w chwili $t=t_s$

$$\boxed{\begin{aligned}&E_k(t=t_s)=E_c-E_p(t=t_s)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2(t=t_s)=\\&=\frac{1}{2}\cdot 0{,}01kg\cdot\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{s^2}\cdot(2)^2m^2-\frac{1}{2}\cdot 0{,}01kg\cdot\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{s^2}\cdot(-1)^2m^2=\frac{3\cdot 0{,}01\pi^2}{8}J\end{aligned}}$$

Moduł maksymalnego przyspieszenia ciała

$$a_x=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow\boxed{\left|a_x\right|_{\max}=A\omega^2=2m\cdot\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{2}\pi^2\frac{m}{s^2}}$$

Moduł przyspieszenia osiąga maksymalną wartość w chwili czasu $t=t_2$ gdy

$$\left|\cos(\omega t_2+\varphi_0)\right|=1\Leftrightarrow\omega t_2+\varphi_0=n\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}t_2+\frac{\pi}{6}=n\pi\Leftrightarrow t_2+\frac{1}{3}=2n\Leftrightarrow t_2=\left(2n-\frac{1}{3}\right)s$$

gdzie $n=1,2,3,\ldots\ldots$

Maksymalna wartość prędkości

$$V_x = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{|V_x|_{\max} = A\omega = 2m \cdot \frac{\pi}{2}\frac{1}{s} = \pi\frac{m}{s}}$$

Prędkość osiąga maksymalną wartość w chwili czasu $t=t_1$ gdy

$$|\sin(\omega t_1 + \varphi_0)| = 1 \Leftrightarrow \omega t_1 + \varphi_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t_1 + \frac{\pi}{6} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_1 + \frac{1}{3} = 2n+1 \Leftrightarrow t_1 = \left(2n + \frac{2}{3}\right)s$$

gdzie n=0,1,2,3,......

Maksymalna wartość siły wypadkowej

$$F_x = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow |F_x|_{\max} = mA\omega^2 = 0{,}01kg \cdot 2m \cdot \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{s^2} = 0{,}01 \cdot \frac{\pi^2}{2}N$$

Siła osiąga maksymalną wartość w chwili czasu $t=t_2$ gdy

$$|\cos(\omega t_2 + \varphi_0)| = 1 \Leftrightarrow t_2 = \left(2n - \frac{1}{3}\right)s$$

gdzie n=1,2,3,......