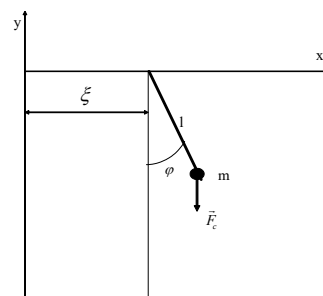




Zadanie 4 (seria III).

1) Znaleźć równanie Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch okresowy wahadła matematycznego o długości l i masie m pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:) $\xi = A \sin(\Omega t)$ (A, Ω - stałe)



Za współzrzedną uogólnioną przyjąć kąt φ określający odchylenie nici wahadła od pionu. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ punkt o masie m umieszczony na końcu nici spoczywał w punkcie o współzrzednych $x(t=0) = 0, y(t=0) = -l$ (l -długość nici wahadła). Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego rozwiązując znalezione równanie zakładając, iż w trakcie ruchu kąt wychylenia wahadła od pionu φ jest na tyle mały, że można założyć, że $\sin(\varphi) \approx \varphi, \cos(\varphi) \approx 1$.

3)-Znaleźć posługując się metodami numerycznymi ruch układu dla określonych powyżej warunków początkowych ruchu bez stosowania przybliżeń dla różnych wartości stałych A i Ω . Przyjąć iż $l=1\text{m}$. Przedyskutować, kiedy znalezione ścisłe rozwiązania ruchu są w przybliżeniu zgodne z rozwiązaniami przybliżonymi uzyskanymi przy założeniu iż kąt określający odchylenie nici od pionu pozostaje mały w trakcie ruchu.

Współzrzedną uogólnioną którą można przyjąć do opisu ruchu układu jest kąt φ jaki nić na którym wisi ciało o masie m tworzy z osią pionową.

Związek między współzrzednymi x, y określającymi w układzie kartezjańskim położenie punktu materialnego o masie m z współzrzedną uogólnioną ma postać:

$$x = A \sin(\Omega t) + l \sin \varphi \quad (1a)$$

$$y = -l \cos \varphi \quad (1b)$$

Z powyższych relacji wynikają związki:

$$\dot{x} = A\Omega \cos(\Omega t) + l \cos(\varphi) \dot{\varphi} \quad (2a)$$

$$\dot{y} = l \sin(\varphi) \dot{\varphi} \quad (2b)$$

Energia kinetyczna układu jest równa: $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.

Uwzględniając relacje (2a) oraz (2b) łatwo można pokazać iż

$$T = \frac{m}{2} (A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + 2 A \Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) \quad (3)$$



Energia potencjalna układu jest równa

$$V = mgy = -mgl \cos(\varphi) \quad (4)$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (A^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + 2A\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) + mgl \cos(\varphi)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mA\Omega l \cos(\Omega t) \cos(\varphi) + ml^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -mA\Omega^2 l \sin(\Omega t) \cos(\varphi) - mA\Omega l \cos(\Omega t) \sin(\varphi) \dot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mA\Omega l \cos(\Omega t) \sin(\varphi) \dot{\varphi} - mgl \sin(\varphi)$$

to równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow -mA\Omega^2 l \sin(\Omega t) \cos(\varphi) + ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \cos(\varphi) \quad (5)$$

W przypadku gdy odchylenie nici od pionu w trakcie ruchu ciała pozostaje małe to wówczas można wprowadzić przybliżenia:

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \cos(\varphi) \approx 1$$

Po wykonaniu tych przybliżeń równanie (5) przyjmuje postać

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \quad (6)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ można zapisać w postaci:

$$\varphi_{og} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Gdy $\omega \neq \Omega$ rozwiązanie szczególne równania pełnego poszukujemy w postaci:

$$\varphi_{sz} = D_1 \cos(\Omega t) + D_2 \sin(\Omega t) \quad (7)$$

Po wstawieniu wzoru (7) do równania (6) otrzymujemy, iż:

$$-D_1\Omega^2 \cos(\Omega t) - D_2\Omega^2 \sin(\Omega t) + D_1\omega^2 \cos(\Omega t) + D_2\omega^2 \sin(\Omega t) = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \quad (8)$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla dowolnego czasu t z czego wynika po przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy $\cos(\Omega t)$ oraz $\sin(\Omega t)$ po obu stronach równania (8) iż :

$$D_1 = 0, D_2 = \frac{\Omega^2 A}{l(\omega^2 - \Omega^2)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (6) w postaci:

$$\varphi = \varphi_{og} + \varphi_{sz} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\Omega^2}{l(\omega^2 - \Omega^2)} A \sin(\Omega t) \quad (9)$$

Z warunku początkowego $x(t=0)=0$ i równania (1a) wynika, iż: $\varphi(t=0)=0$.

Ponieważ z równania (9) wynika iż $\varphi(t=0)=C_1$ to wynika stąd iż stała $C_1=0$.

Z warunku początkowego $\dot{x}(t=0)=0$ oraz równania (2a) wynika iż

$$\dot{\varphi}(t=0) = -\frac{A\Omega}{l} \quad (10)$$

Z drugiej strony z równania (9) wynika iż

$$\dot{\varphi} = -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t) + \frac{\Omega^3}{(\omega^2 - \Omega^2)l} A \cos(\Omega t) \quad (11)$$

a zatem

$$\dot{\varphi}(t=0) = C_2\omega + \frac{\Omega^3}{(\omega^2 - \Omega^2)l} A \quad (12)$$

Z porównania relacji (10) i (12) wynika, że:

$$C_2\omega + \frac{\Omega^3 A}{(\omega^2 - \Omega^2)l} = -A\frac{\Omega}{l} \text{ czyli } C_2 = -\frac{A\Omega}{l\omega} \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right] = -\frac{A\omega\Omega}{l(\omega^2 - \Omega^2)}.$$

Uwzględniając to otrzymujemy, iż:

$$\varphi(t) = \frac{A\Omega^2}{l(\omega^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\omega}{\Omega} \sin(\omega t) \right] \quad (13)$$

Gdy $\omega = \Omega$ rozwiązanie szczególne równania pełnego poszukujemy w postaci:

$$\varphi_{sz} = D_1 t \cos(\Omega t) + D_2 t \sin(\Omega t) \quad (14)$$

Po wstawieniu wzoru (14) do równania (6) uwzględniając to iż $\omega = \Omega$ otrzymujemy, iż:

$$-D_1 t \Omega^2 \cos(\Omega t) - D_2 t \Omega^2 \sin(\Omega t) - 2D_1 \Omega \sin(\Omega t) + 2D_2 \Omega \cos(\Omega t) + \Omega^2 D_1 t \cos(\Omega t) + \Omega^2 D_2 t \sin(\Omega t) = \frac{A\Omega^2}{l} \sin(\Omega t) \quad (15)$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla dowolnego czasu t z czego wynika po przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy $\cos(\Omega t)$ oraz $\sin(\Omega t)$ po obu stronach równania (8) iż :

$$D_1 = -\frac{A\Omega}{2l}, D_2 = 0$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (6) w postaci:

$$\varphi = \varphi_{og} + \varphi_{sz} = C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t) - \frac{A\Omega t}{2l} \cos(\Omega t) \quad (16)$$

Z warunku początkowego $x(t=0)=0$ i równania (1a) wynika, iż: $\varphi(t=0)=0$.

Ponieważ z równania (9) wynika iż $\varphi(t=0)=C_1$ to wynika stąd iż stała $C_1=0$.

Z warunku początkowego $\dot{x}(t=0)=0$ oraz równania (2a) wynika iż

$$\dot{\varphi}(t=0) = -\frac{A\Omega}{l} \quad (17)$$

Z drugiej strony z równania (16) wynika iż

$$\dot{\varphi} = -C_1 \Omega \sin(\Omega t) + C_2 \Omega \cos(\Omega t) + \frac{A\Omega^2 t}{2l} \sin(\Omega t) - \frac{A\Omega}{2l} \cos(\Omega t) \quad (18)$$

a zatem

$$\dot{\varphi}(t=0) = C_2 \Omega - \frac{A\Omega}{2l} \quad (19)$$

Z porównania relacji (17) i (19) wynika, że:

$$C_2 = -\frac{A}{2l}.$$

Uwzględniając to otrzymujemy, iż:

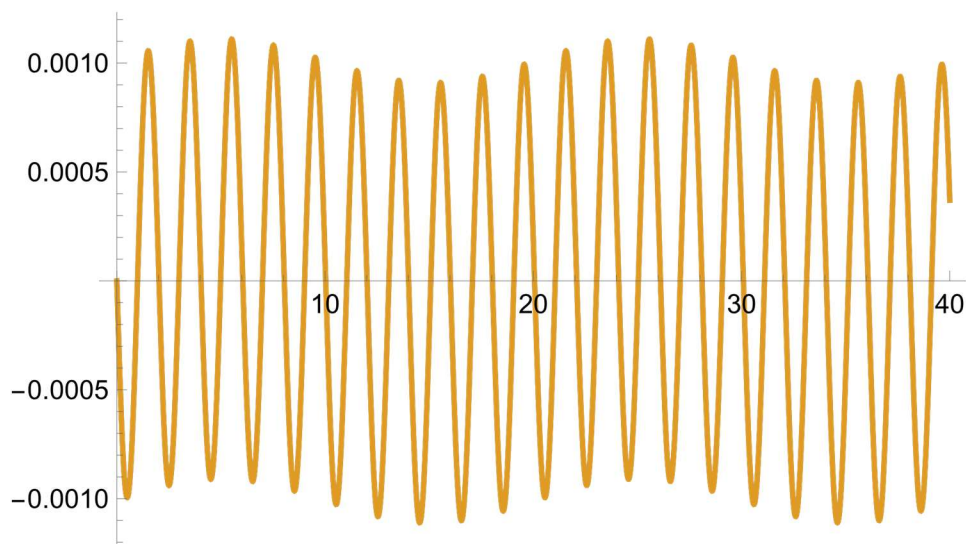
$$\varphi = -\frac{A}{2l} \sin(\Omega t) - \frac{A\Omega t}{2l} \cos(\Omega t) \quad (20)$$

Na poniższych rysunkach zaznaczono zależność kąta φ od czasu

- otrzymane w oparciu o wzór (13) (lub 20 gdy $\omega = \Omega$) będący wzorem przybliżonym (krzywa niebieska)
 - otrzymane w oparciu o ściśle rozwiązanie równania ruchu (5) (krzywa żółta)
- Na rysunkach na których nie widać krzywej niebieskiej krzywa ta pokrywa się z krzywą żółtą

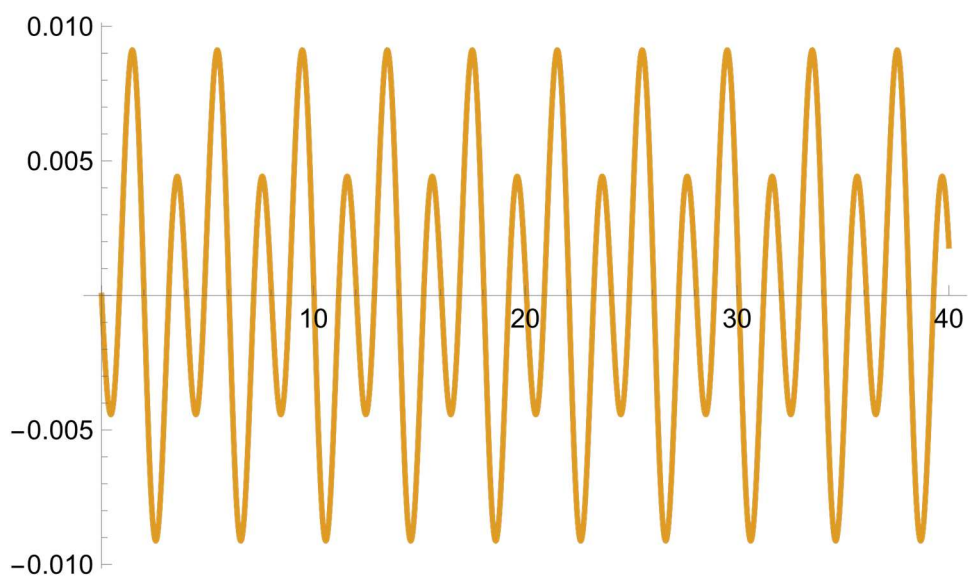
I) dla $l=1\text{m}$ i $A=0.01\text{m}$ dla różnych Ω

a) $\Omega=0.1\omega$

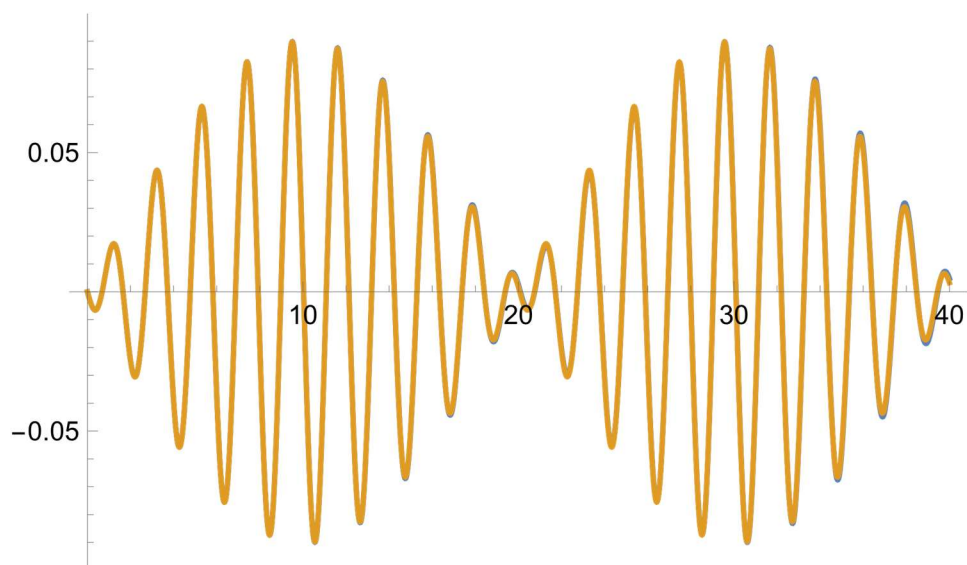


Złożenie drgań o częstotliwości Ω i ω . Drgania o częstotliwości ω zachodzą z większą amplitudą

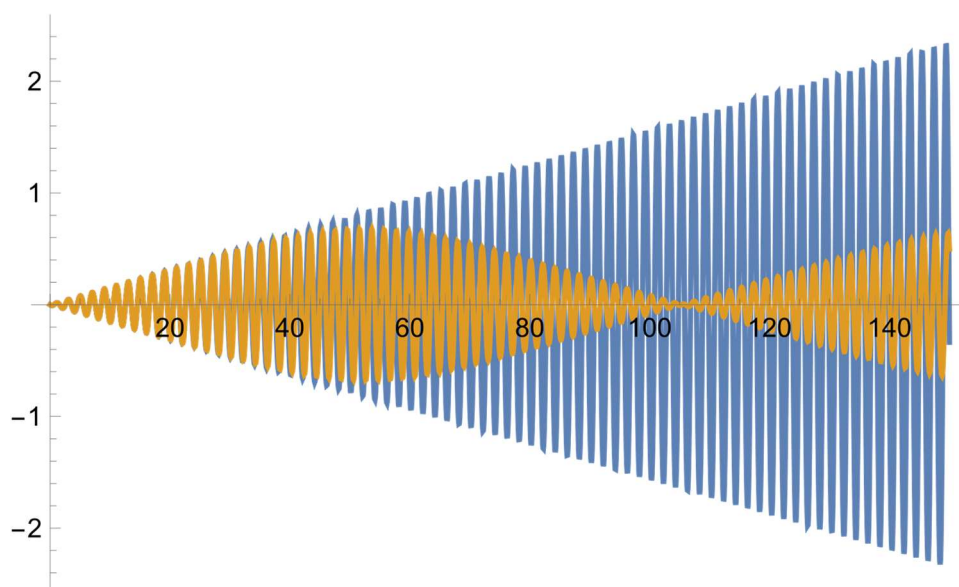
b) $\Omega=0.5\omega$



c) $\Omega = 0.9 \omega$



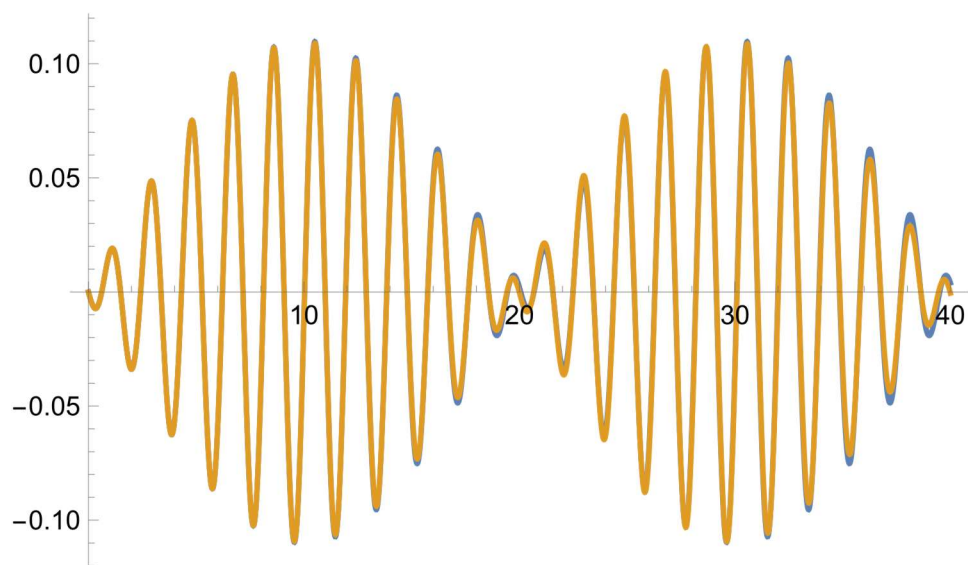
d) $\Omega = \omega$



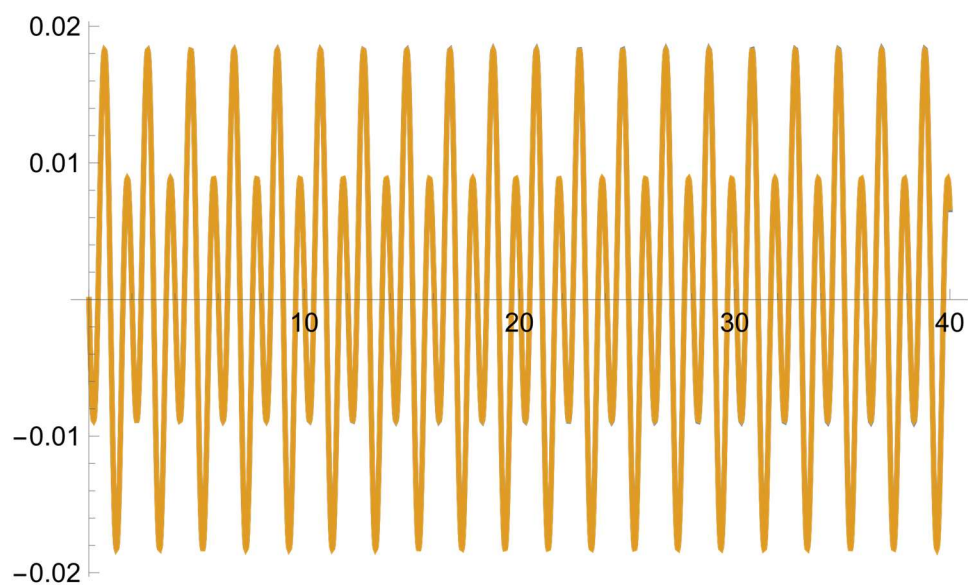
Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta φ i nie może opisywać zachowania układu



e) $\Omega = 1.1 \omega$

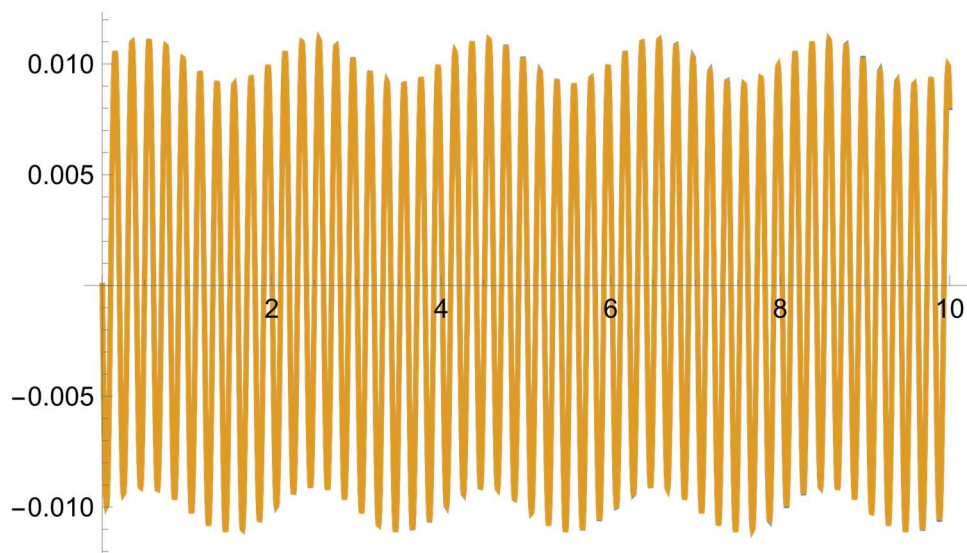


f) $\Omega = 2\omega$





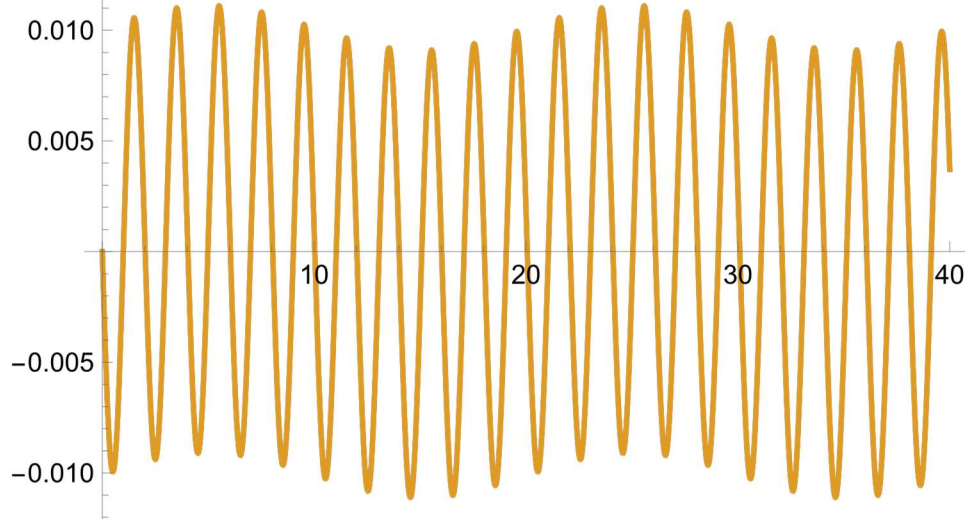
g) $\Omega=10\omega$ (zmiana skali)



Złożenie drgań o częstości Ω i ω . Drgania o częstości Ω zachodzą z większą amplitudą.

II) dla $l=1\text{m}$ i $A=0.1\text{m}$ dla różnych Ω

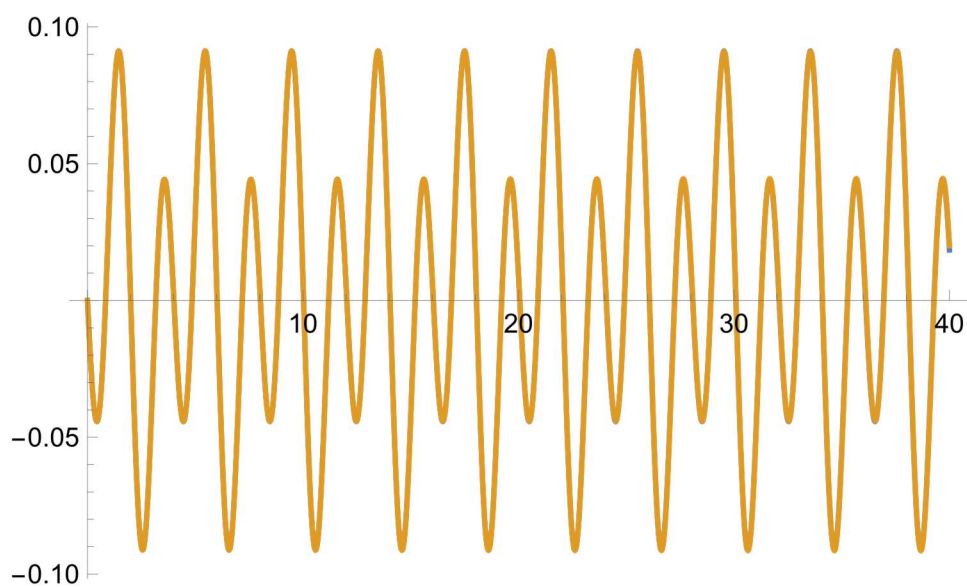
a) $\Omega=0.1\omega$



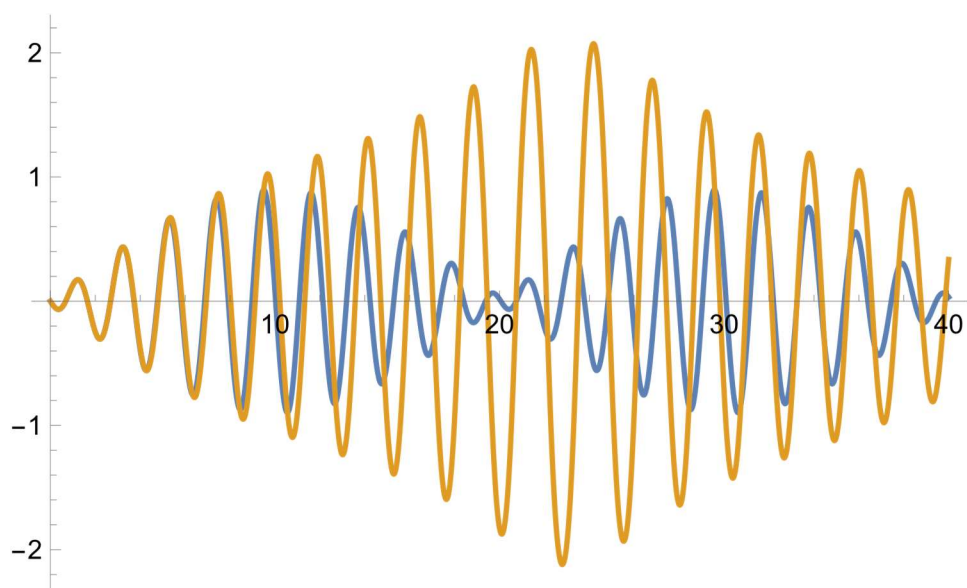
Złożenie drgań o częstości Ω i ω . Drgania o częstości ω zachodzą z większą amplitudą.



b) $\Omega = 0.5\omega$

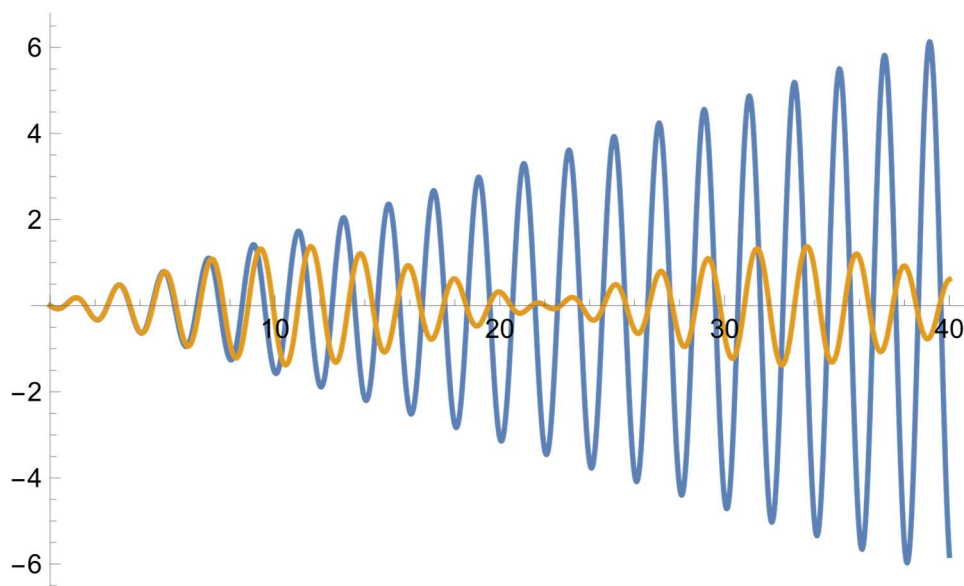


c) $\Omega = 0.9\omega$



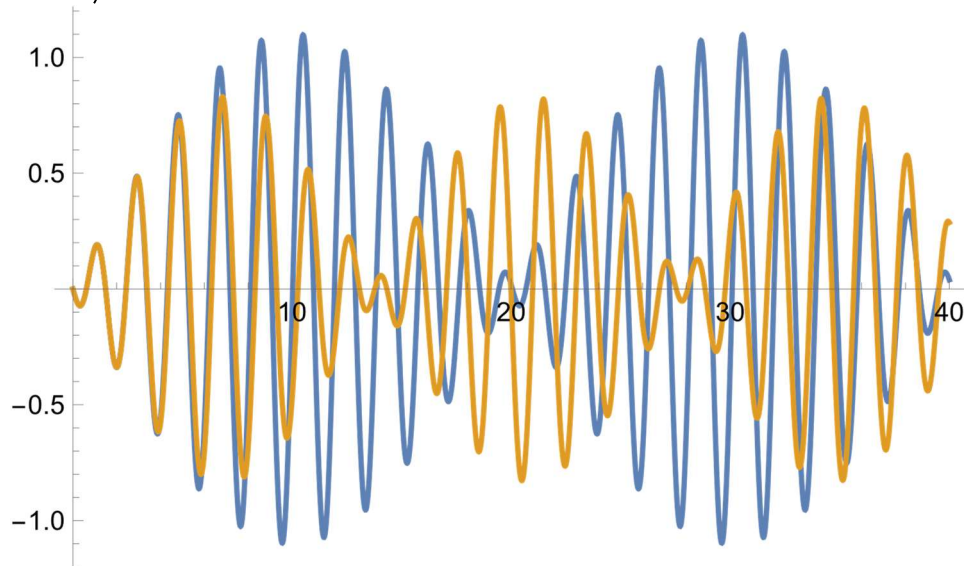
Widać znaczne różnice między rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym. Kat φ osiąga znaczące wartości

d) $\Omega = \omega$



Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta φ i nie może opisywać zachowania układu

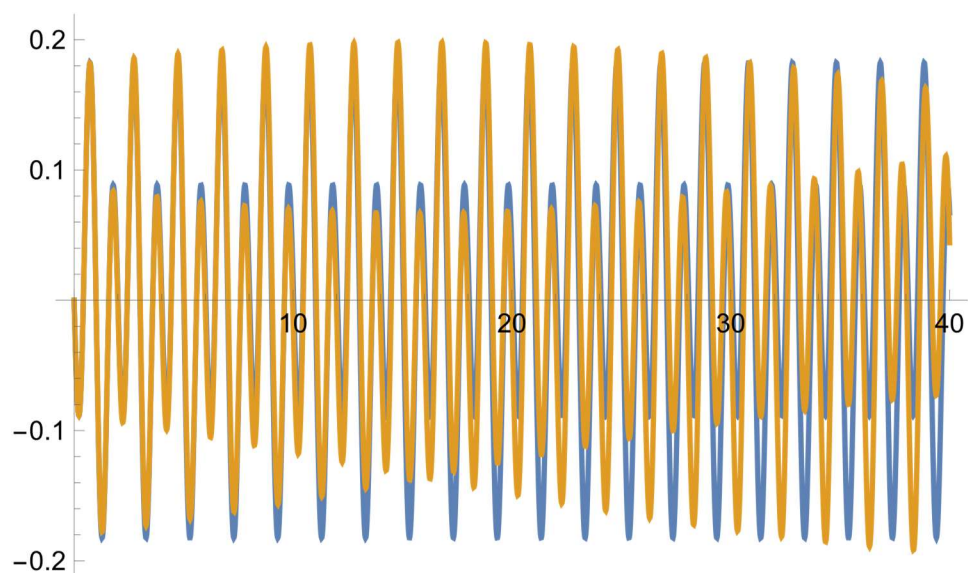
e) $\Omega = 1.1 \omega$



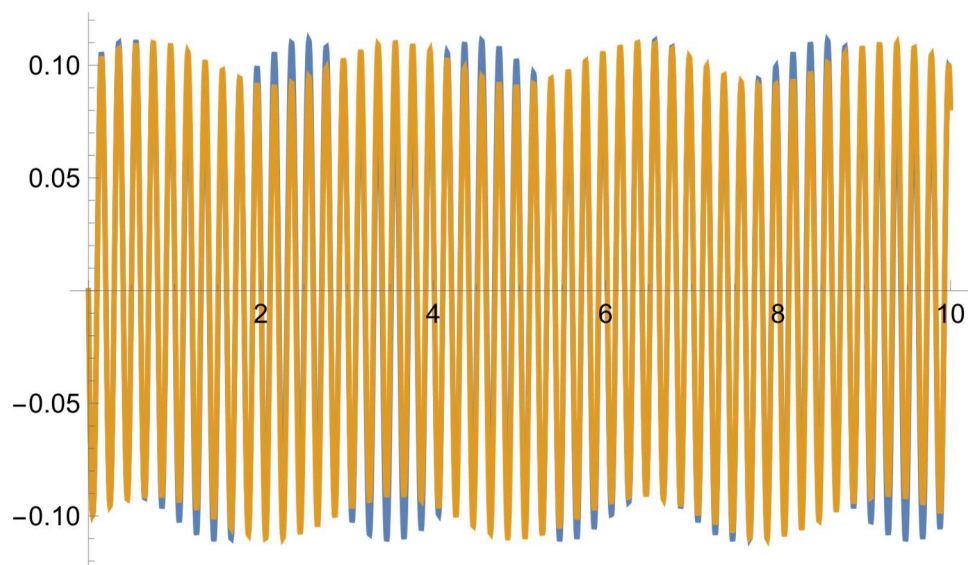
Widać znaczące różnice między rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym



f) $\Omega=2\omega$



g) $\Omega=10\omega$



Złożenie drgań o częstotliwości Ω i ω . Drgania o częstotliwości Ω zachodzą z większą amplitudą.



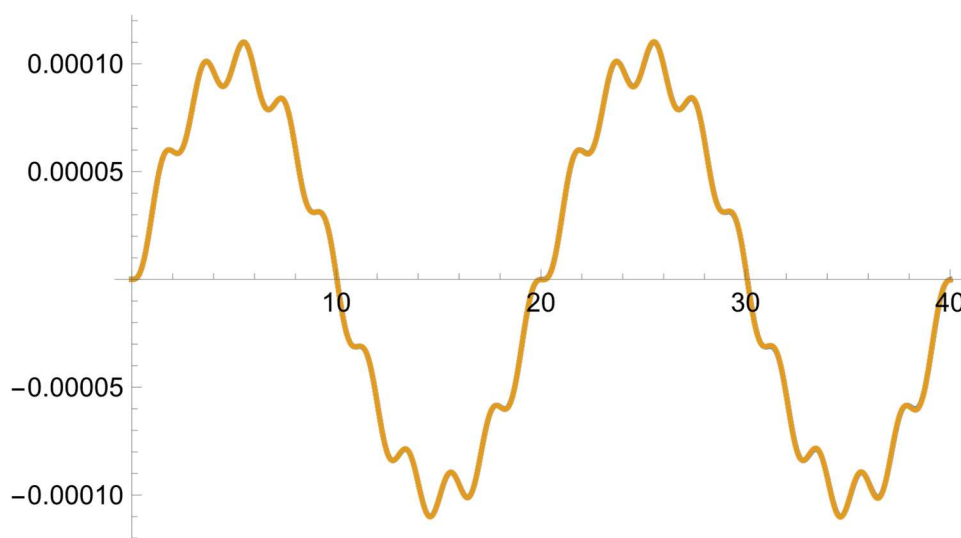
Dygresja Rozwiązanie silnie zależy od warunków początkowych ruchu.

Przy założeniu iż $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ w przybliżeniu małych drgań w przypadku

- 1) gdy $\omega^2 \neq \Omega^2$ otrzymujemy $C_2\omega + \frac{\Omega^3 A}{(\omega^2 - \Omega^2)l} = 0$ czyli $C_2 = -\frac{A\omega\Omega}{l(\omega^2 - \Omega^2)}$ i ostatecznie $\varphi(t) = \frac{A\Omega^2}{l(\omega^2 - \Omega^2)} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t) \right]$
- 2) gdy $\omega = \Omega$ otrzymujemy $C_2 = \frac{A}{2l}$ i ostatecznie $\varphi = \frac{A}{2l} \sin(\Omega t) - \frac{A\Omega t}{2l} \cos(\Omega t)$

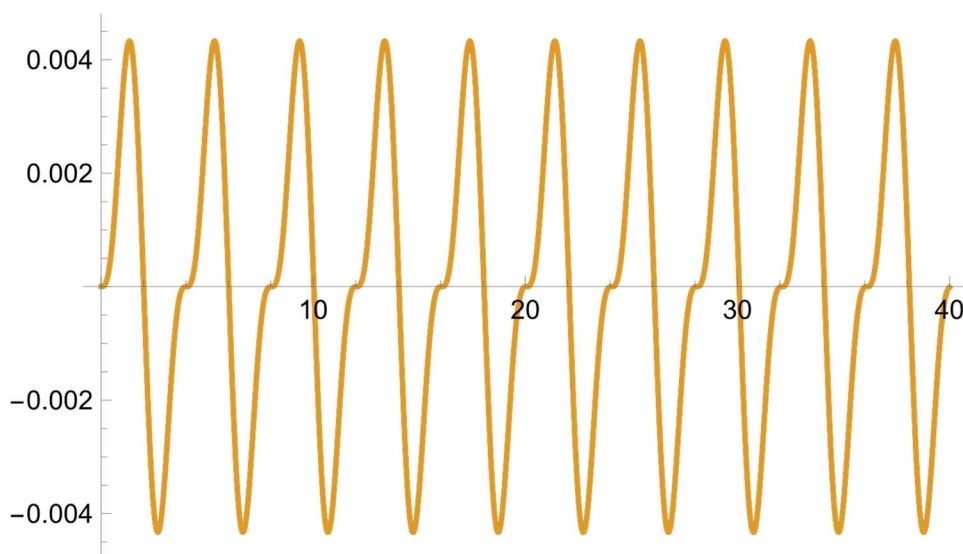
l) Rozwiązanie numeryczne otrzymane dla $l=1\text{m}$, $A=0.01\text{m}$

a) $\Omega=0.1\omega$,

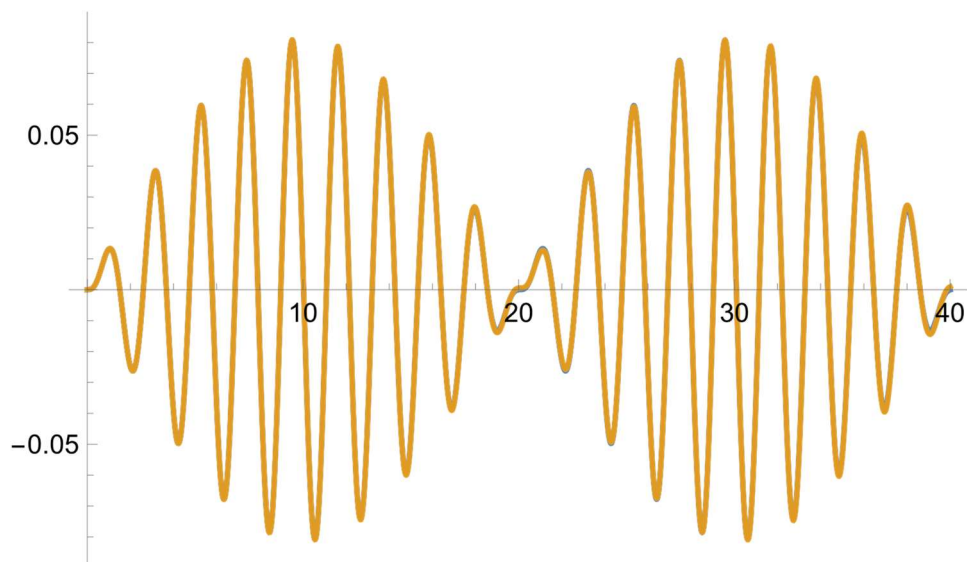


Złożenie drgań o częstości Ω i ω . Drgania o częstości Ω zachodzą z większą amplitudą

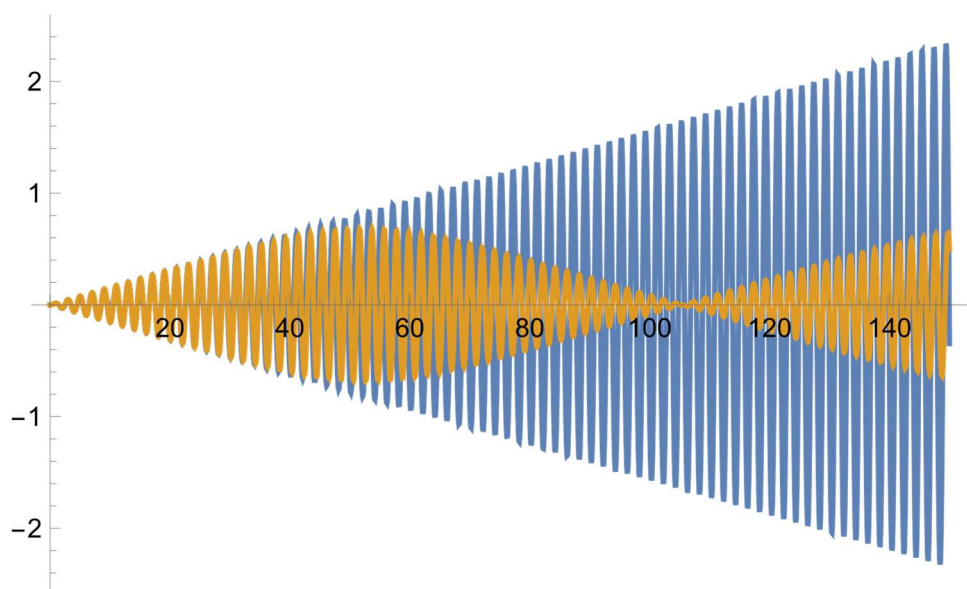
b) $\Omega=0.5\omega$



c) $\Omega = 0.9\omega$

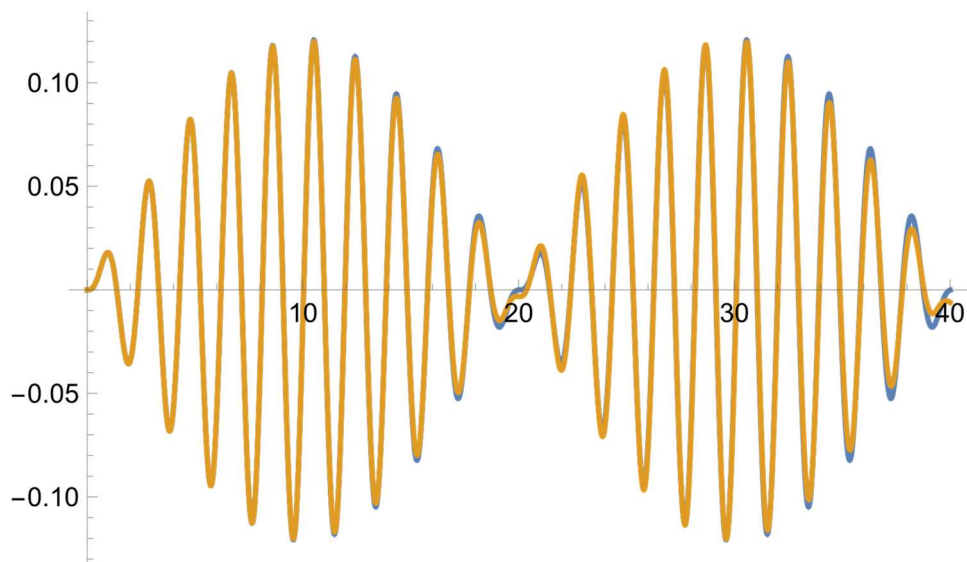


d) $\Omega = \omega$

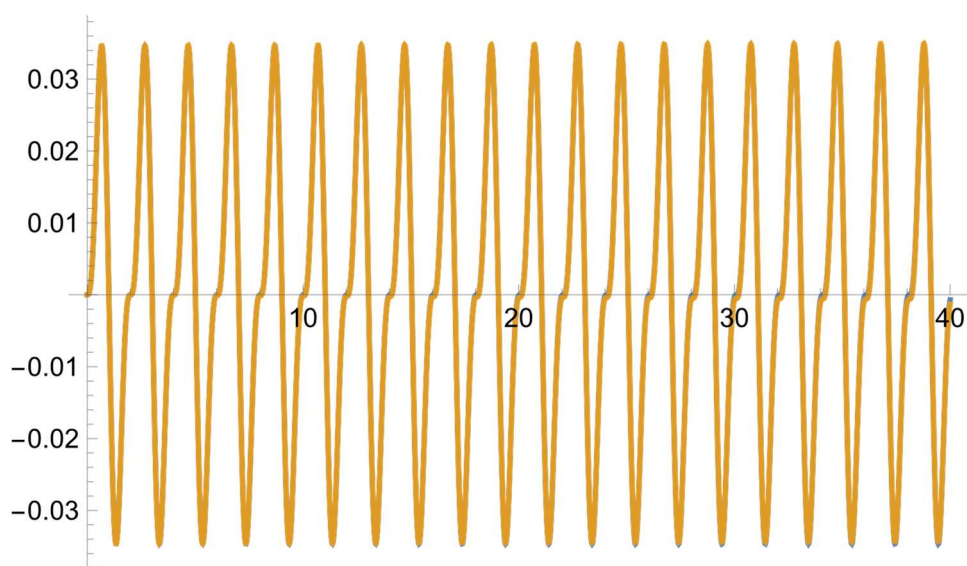


Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta φ i nie może opisywać zachowania układu

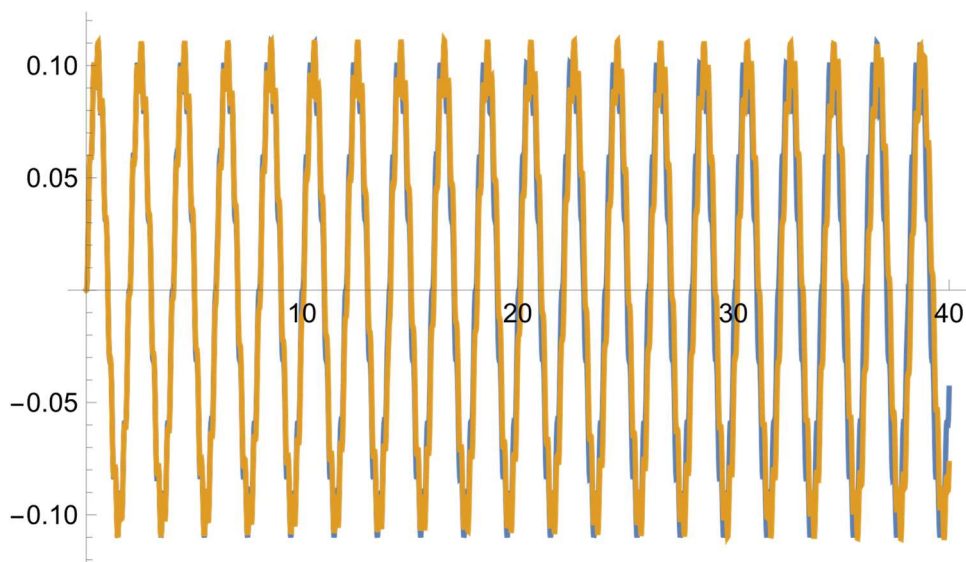
e) $\Omega=1.1\omega$



f) $\Omega=2\omega$



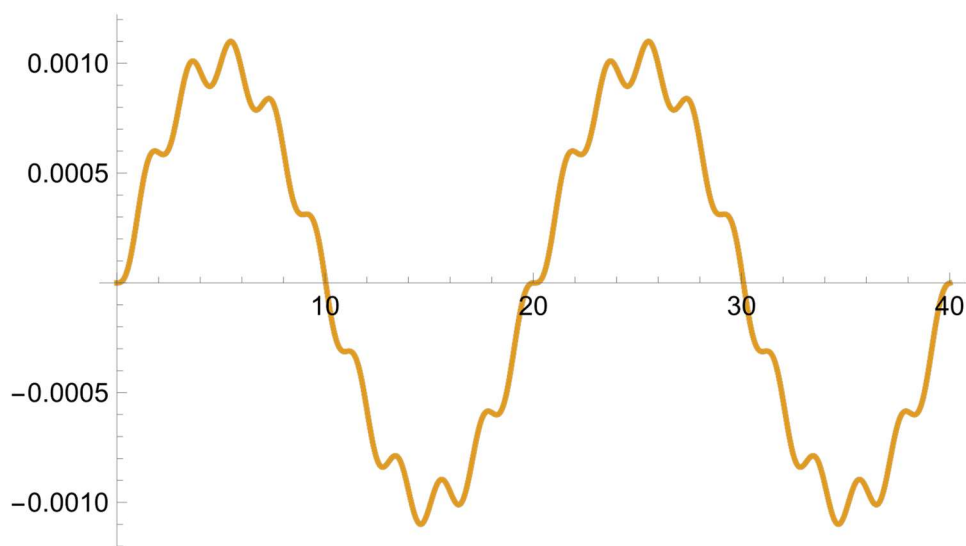
g) $\Omega=10\omega$



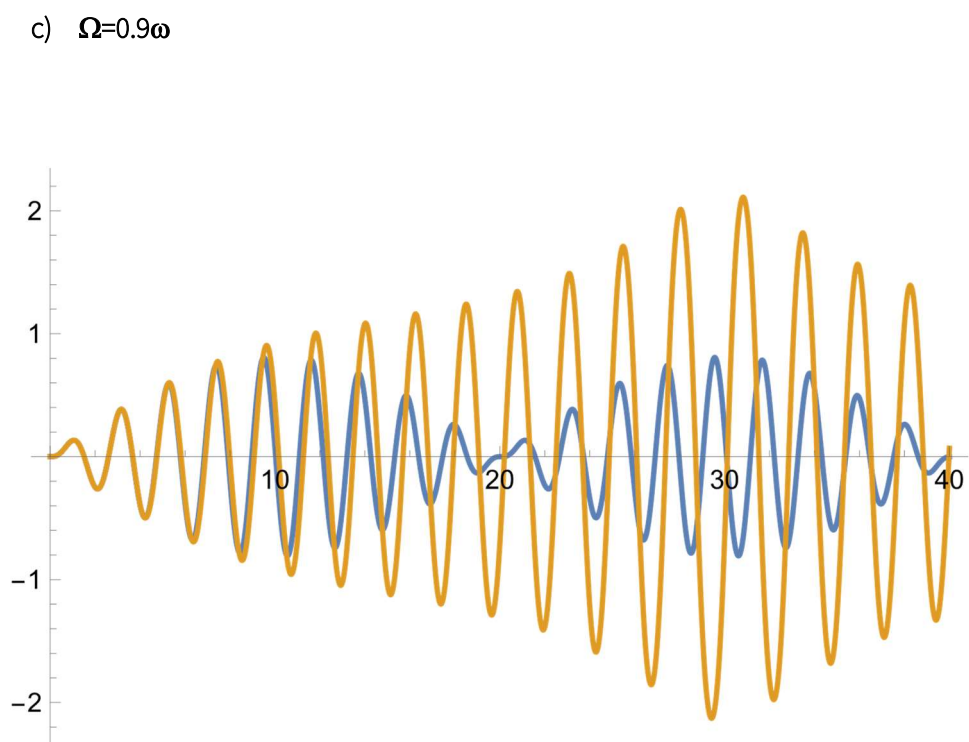
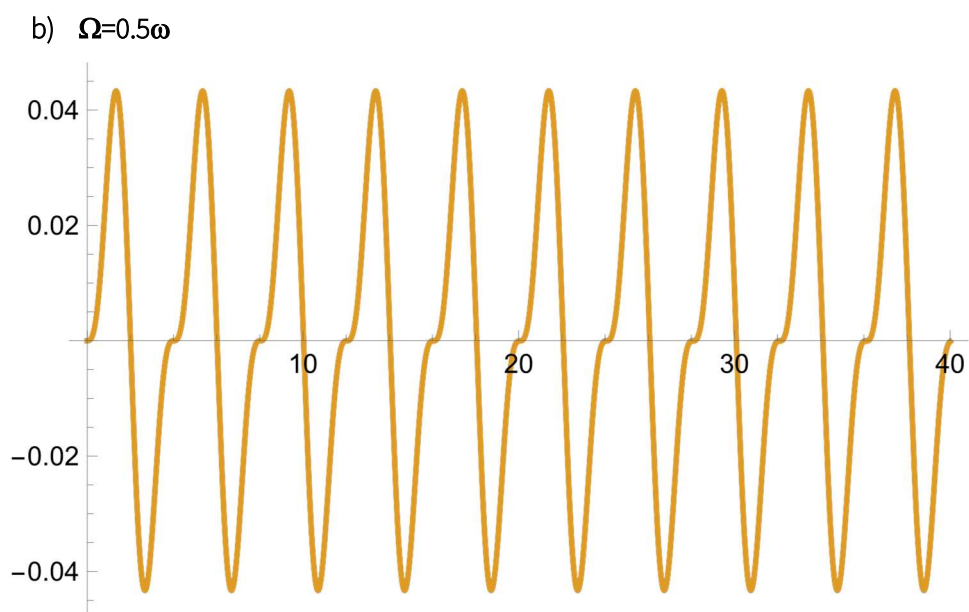
Złożenie drgań o częstości Ω i ω . Drgania o częstości ω zachodzą z większą amplitudą

II) Rozwiązanie numeryczne otrzymane dla $l=1\text{m}$, $A=0.1\text{m}$

a) $\Omega=0.1\omega$,

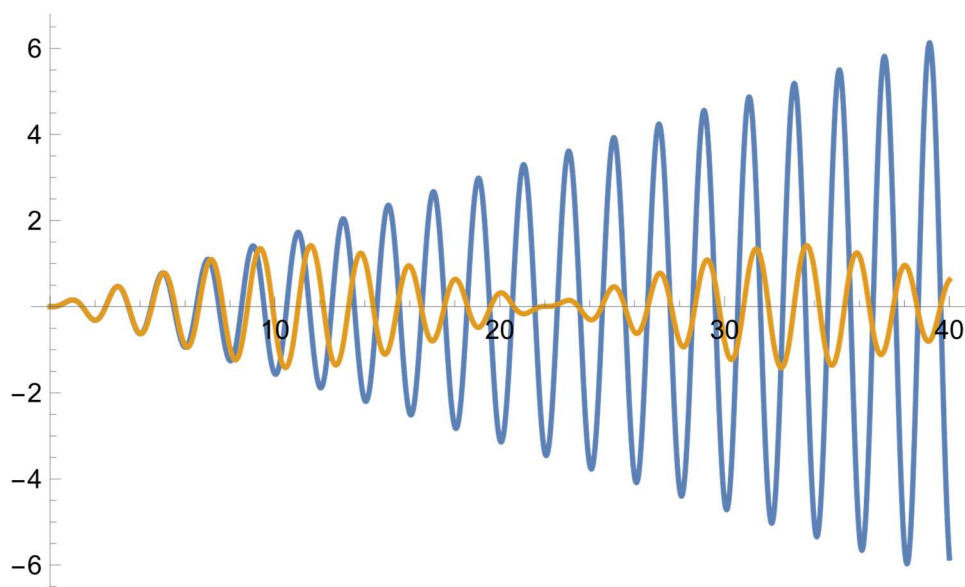


Złożenie drgań o częstości Ω i ω . Drgania o częstości Ω zachodzą z większą amplitudą



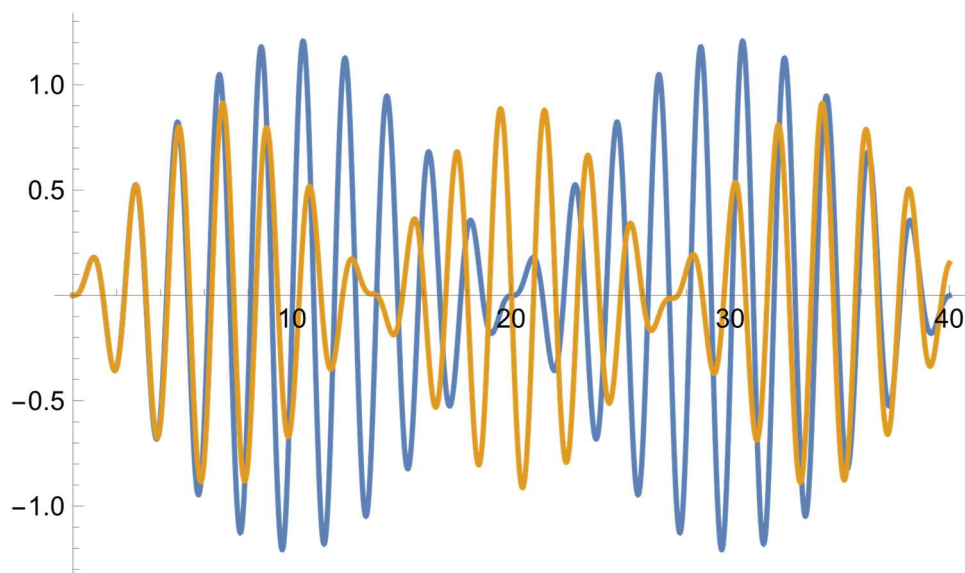
Widać iż zastosowane przybliżenie w tym przypadku nie jest uzasadnione

d) $\Omega = \omega$



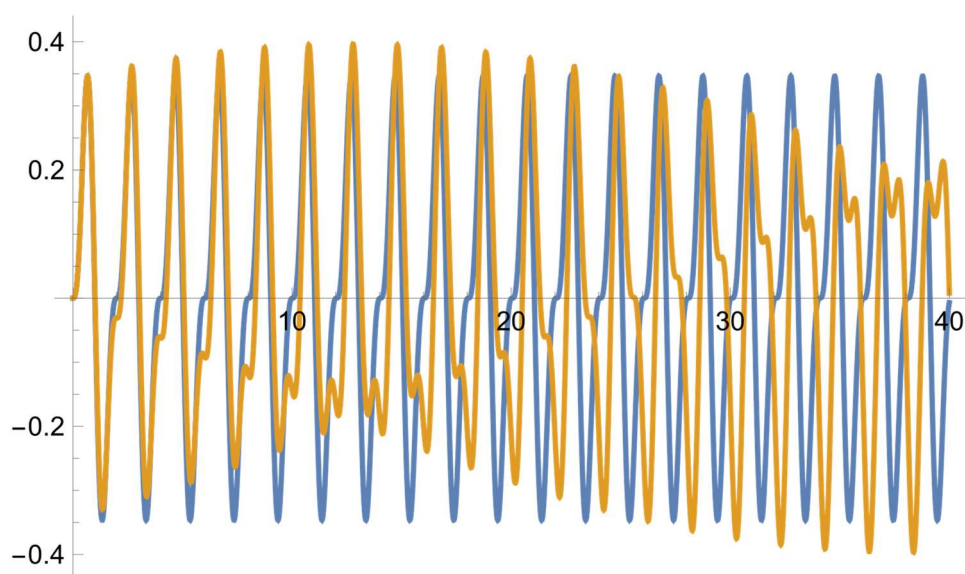
Rozwiązanie przybliżone prowadzi do nieograniczonego wzrostu kąta φ i nie może opisywać zachowania układu

e) $\Omega = 1.1\omega$

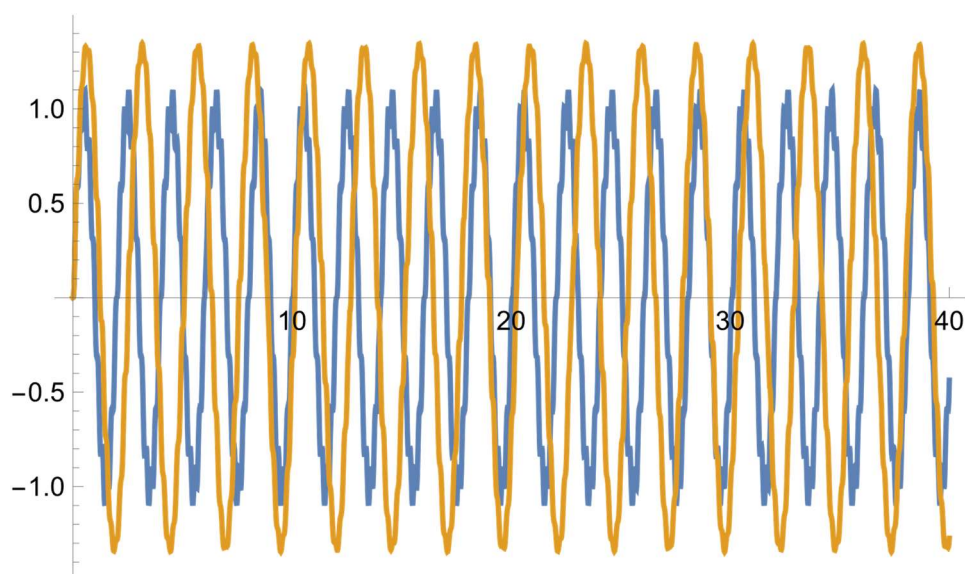


Widać iż zastosowane przybliżenie w tym przypadku nie jest uzasadnione

f) $\Omega=2\omega$



g) $\Omega=10\omega$



Złożenie drgań o częstości Ω i ω . Drgania o częstości ω zachodzą z większą amplitudą