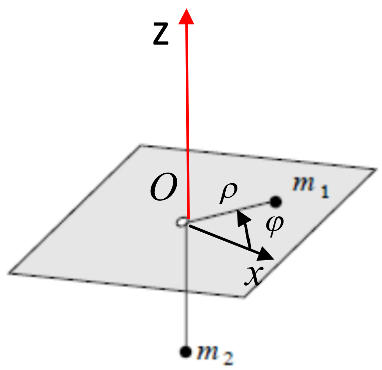
Zadanie 4 (seria III) . Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się punkt materialny o masie m_1. Do punktu przymocowano wiotką i nierozciągliwą nić o długości l i pomijalnie małej masie, która przechodzi przez mały otwór w płaszczyźnie i dźwiga na drugim końcu pionowo zwisający punkt materialny o masie m_2. Wiadomo iż w chwili początkowej punkt materialny o masie m_1 znajdował się w odległości ρ_0 od otworu i poruszał się w poziomej płaszczyźnie z prędkością skierowaną prostopadle do nici o wartości $V = \rho_0\omega_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.



1) Znaleźć funkcję Lagrange'a i zapisać równania Lagrange'a II rodzaju opisujące ruch układu złożonego z obu punktów.
2) Wyznaczyć $\ddot{\rho}$ w trakcie ruchu jako funkcję ρ gdzie ρ oznacza odległość ciała o masie m_1 od otworu w płaszczyźnie.
3) Określić zależność siły naciągu nici od odległości punktu o masie m_1 od otworu w płaszczyźnie.
4) Określić wartość ω_0, przy której odległość punktu o masie m_1 od otworu nie ulegała by zmianie w trakcie ruchu.

Ponieważ ruch ciała o masie m_1 odbywa się na płaszczyźnie to do opisu jego położenia potrzeba dwóch zmiennych, którymi mogą być współrzędne w układzie biegunowym o początku w miejscu położenia otworu na płaszczyźnie ρ, φ.

Z uwagi na powiązanie ciała o masie m_1 z ciałem o masie m_2 nicią o długości l, położenie ciała o masie m_2 które może poruszać się tylko w kierunku pionowym, jest określone również przez współrzędną ρ.

W szczególności zachodzi $z_2 = -(l - \rho)$

Wybór współrzędnych uogólnionych

liczba stopni swobody f=2 → dwie współrzędne uogólnione $q_1 = \rho, q_2 = \varphi$

Wyznaczenie energii kinetycznej *T*

Energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznej obu ciał. Energie każdego z ciała można określić w układzie cylindrycznym w którym składowe prędkości $v_\rho = \dot{\rho}, v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, v_z = \dot{z}$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}\left(v_{1\rho}^2 + v_{1\varphi}^2 + v_{1z}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(v_{2\rho}^2 + v_{2\varphi}^2 + v_{2z}^2\right) = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + 0\right) + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2$$

$$z_2 = -(l-\rho) \Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{\rho} \Rightarrow T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2$$

Wyznaczenie energii potencjalnej V

$$\vec{F}_1 = -grad_1 V, \vec{F}_2 = -grad_2 V \Rightarrow$$

$$F_{1x} = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$F_{1y} = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y_1}$$

$$F_{1z} = -m_1 g = -\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

$$\Rightarrow V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$$F_{2x} = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

$$F_{2y} = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y_2}$$

$$F_{2z} = -m_2 g = -\frac{\partial V}{\partial z_2}$$

$$z_2 = -(l-\rho), z_1 = 0 \Rightarrow V = -m_2 g l + m_2 g\rho = m_2 g\rho - const$$

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2 - m_2 g\rho + const$$

Zapis równań Lagrange'a II rodzaju $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \qquad l = 1,2$

$$L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2 - m_2 g\rho + const$$

$$l = 1, q_1 = \rho \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{\rho}\right] - m_1\rho\dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0$$

$$l = 2, q_2 = \varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[m_1\rho^2\dot{\varphi}\right] = 0$$

Wyznaczenie $\ddot{\rho}$ w trakcie ruchu jako funkcji ρ

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\rho^2\dot{\varphi}\right] = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1\rho^2\dot{\varphi} = const \Rightarrow p_\varphi(t) = p_\varphi(t = 0)$$

Pęd uogólniony związany ze współrzędną φ

Wyznaczenie $p_\varphi(t = 0)$ z warunków początkowych ruchu

$\rho(t = 0) = \rho_0 \qquad v_{1\rho}(t = 0) = 0 \qquad v_{1\varphi}(t = 0) = \pm\rho_0\omega_0$ (znak zależy od zwrotu wektora prędkości).

$v_{1\rho} = \dot{\rho} \qquad v_{1\varphi} = \rho\dot{\varphi} \Rightarrow \qquad \dot{\rho}(t = 0) = 0 \quad \dot{\varphi}(t = 0) = \pm\omega_0 \quad \Rightarrow p_\varphi(t = 0) = \pm m_1\rho_0^2\omega_0$

$$p_\varphi = m_1\rho^2\dot{\varphi} \qquad p_\varphi(t=0) = \pm m_1\rho_0^2\omega_0$$

$$p_\varphi(t) = p_\varphi(t=0) \Rightarrow \quad m_1\rho^2\dot{\varphi} = \pm m_1\rho_0^2\omega_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \pm\frac{\rho_0^2\omega_0}{\rho^2}$$

$$(m_1+m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0 \Rightarrow \quad (m_1+m_2)\ddot{\rho} - \frac{m_1\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} + m_2 g = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}g + \frac{m_1\rho_0^4\omega_0^2}{(m_1+m_2)\rho^3}$$

Uzależnienie siły naciągu nici od ρ

Siła naciągu nici jest równa wziętej z przeciwnym znakiem składowej radialnej F_ρ siły wypadkowej (z uwzględnieniem siły reakcji więzów) działającej na ciało o masie m_1

$$F_\rho = m_1 a_{1\rho} = m_1\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) =$$

$$\ddot{\rho} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}g + \frac{m_1\rho_0^4\omega_0^2}{(m_1+m_2)\rho^3}, \qquad \dot{\varphi} = \pm\frac{\rho_0^2\omega_0}{\rho^2} \Rightarrow$$

$$F_\rho = m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}g + \frac{m_1\rho_0^4\omega_0^2}{(m_1+m_2)\rho^3} - \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3}\right) = m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}g - \frac{m_2\rho_0^4\omega_0^2}{(m_1+m_2)\rho^3}\right) =$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[g + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3}\right]$$

$$F_N = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[g + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3}\right]$$

Kiedy wielkość ρ nie zależy od czasu przy następujących warunkach początkowych ruchu $\dot{\rho}(t=0)=0$ **oraz** $\rho_0=\rho(t=0)$

$$\ddot{\rho}(\rho=\rho_0)=0 \Leftrightarrow -\frac{m_2}{m_1+m_2}g+\frac{m_1\rho_0^4\omega_0^2}{(m_1+m_2)\rho_0^3}=0 \Leftrightarrow \omega_0=\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{m_1\rho_0}}$$

W trakcie ruchu, w którym ρ nie ulega zmianie w czasie $\rho=const=\rho_0$, siła naciągu nici musi być równa sile dośrodkowej o wartości $F_d=m_1\omega_0^2\rho_0$ czyli

$$F_N(\rho=\rho_0)=F_d \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[g+\frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho_0^3}\right]=m_1\omega_0^2\rho_0 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1+m_2}\left[g+\rho_0\omega_0^2\right]=\omega_0^2\rho_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2 g}{m_1+m_2}=\omega_0^2\rho_0\left[1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right] \Rightarrow \frac{m_2 g}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\omega_0^2\rho_0 \Rightarrow \omega_0=\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{m_1\rho_0}}$$